

# Programme de colle n° 20

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 09/03 au 13/03 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

## Chapitre 15 : Polynômes.

- Vocabulaire : coefficient dominant, degré d'un polynôme, polynôme unitaire, notations  $\mathbb{K}[X]$  et  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- Opérations de base sur  $\mathbb{K}[X]$  : somme, produit, composée, et propriétés élémentaires.
- Racines d'un polynôme :
  - notion de divisibilité dans  $\mathbb{K}[X]$ , **division euclidienne**
  - **factorisation d'un polynôme par  $X - a$  quand  $a$  est racine de  $P$** , nombre maximal de racines pour un polynôme de degré  $n$ , principe d'identification des coefficients
  - polynôme dérivé, multiplicité d'une racine, caractérisation à l'aide des polynômes dérivés, formule de Leibniz, polynômes scindés, théorème de d'Alembert-Gauss
  - relations coefficients racines (pas de formule générale, mais à savoir retrouver très rapidement pour un polynôme de degré 3 ou 4)
- Arithmétique dans  $\mathbb{K}[X]$  :
  - polynôme irréductible, caractérisation des polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$
  - PGCD, PPCM de deux polynômes ou d'une famille de polynômes, algorithme d'Euclide, théorèmes de Bézout et de Gauss, polynômes premiers entre eux
  - décomposition en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  (on doit être capable de **justifier le résultat** en partant de la décomposition dans  $\mathbb{C}[X]$ , en précisant que si  $z$  est racine de  $P$  alors  $\bar{z}$  l'est aussi avec la même multiplicité, puis en calculant le produit  $(X - z)(X - \bar{z})$  pour faire apparaître les coefficients réels)
- polynômes interpolateurs de Lagrange
- **formule de Taylor pour les polynômes** (on a fait la démonstration dans le cas où  $P = X^i$  puis très rapidement invoqué la linéarité pour justifier le cas général).

## Chapitre 16 : Analyse asymptotique.

- Négligeabilité et équivalence :

- définition pour les suites (sous la forme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ ), notations  $u_n = o(v_n)$  et  $u_n \sim v_n$
- manipulations et règles de calcul (produits et quotients, passage des équivalents à une puissance quelconque, équivalence entre  $u_n \sim v_n$  et  $u_n = v_n + o(v_n)$ , on a bien sûr insisté sur l'interdiction d'additionner des équivalents ou de les composer par d'autres fonctions que les fonctions puissances), on autorise les abus de notation du type «  $o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)$  »
- extension aux fonctions réelles
- croissances comparées, équivalents classiques issus de taux d'accroissements ( $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ ,  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ ,  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ ,  $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ )
- Développements limités :
  - formule de Taylor-Young
  - vocabulaire (partie régulière d'un DL) et notations
  - parité de la partie régulière du DL d'une fonction paire ou impaire
  - formulaire de DL usuels à connaître par coeur :  $e^x$ ,  $\text{ch}(x)$ ,  $\text{sh}(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\frac{1}{1-x}$ ,  $\frac{1}{1+x}$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$  (on doit en particulier connaître par coeur les premiers termes du DL de  $\sqrt{1+x}$ )
  - méthodes de calcul d'un produit, quotient, composée de DL (on autorise les notations légèrement abusives consistant à écrire directement des  $o$  dans les composées), intégration ou dérivation de DL
  - formulaire de DL à savoir retrouver rapidement :  $\tan(x)$  (les trois premiers termes doivent être connus),  $\arctan(x)$ ,  $\arcsin(x)$ ,  $\arccos(x)$
- Applications classiques des calculs de DL :
  - calculs de limites (suites ou fonctions), on doit être capable de choisir l'ordre du DL en anticipant le calcul pour ne pas faire de calculs complexes inutilement
  - étude locale de fonction (existence de tangente et position relative de la courbe et de la tangente en 0, existence d'asymptotes obliques et position relative en  $\pm\infty$ )
  - développements asymptotiques de suites implicites

Prévisions pour la semaine suivante : encore les développements limités, peut-être un peu d'espaces vectoriels.