Programme de colle n° 17

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 03/02 au 07/02 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 13 : Dérivation

- Dérivation, vocabulaire et formulaire :
  - taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ d'une fonction f en a, interprétation graphique comme pente de la droite reliant les points de la courbe d'abscisses a et $a+h$, définition de $f'(a)$ comme limite du taux d'accroissement, fonction dérivable en a et dérivable sur un intervalle I
  - dérivée à gauche ou à droite en a, demi-tangentes à la courbe quand les deux valeurs sont distinctes, existence de tangentes verticales en cas de limite infinie du taux d'accroissement
  - équation de la tangente en a à la courbe représentative de f, développement limité à l'ordre 1 de f en a (écrit sous la forme $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$)
  - démonstration des diverses formules de dérivation (**somme**, **produit**, **inverse**, **quotient**, composée, réciproque)
  - dérivées successives d'une fonction, notation $f^{(n)}$, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle, formule de Leibniz pour la dérivée n-ème d'un produit
- Théorèmes faisant intervenir la dérivation :
  - si f est dérivable sur $[a,b]$ et admet un extremum en $x \in]a,b[$, alors $f'(x) = 0$ (**démonstration** à connaître)
  - théorème de Rolle
  - théorème des accroissements finis (sa **démonstration** à l'aide du théorème de Rolle est à connaître)
  - application du TAF à l'étude des variations
  - théorème de prolongement de la dérivée (si f est dérivable sur $]a,b]$, continue en a et f' admet une limite l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$)
  - inégalité des accroissements finis (deux versions, une avec une hypothèse du type $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ sur un intervalle I, une autre où on a une hypothèse de majoration de $|f'|$)
- Étude de suites récurrentes :
  - vocabulaire de base (suite récurrente, intervalle stable par une fonction f, point fixe d'une fonction)
  - la limite éventuelle d'une suite récurrente est un point fixe de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$
  - utilisation de l'IAF pour démontrer la convergence et éventuellement obtenir des informations sur la vitesse de convergence d'une suite récurrente (u_n) (aucune connaissance

spécifique n'est exigée mais les élèves doivent connaître le fonctionnement global, et notamment savoir quand faire des récurrences)

- Extension des définitions de limite, continuité, dérivabilité aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$, avec $I \subset \mathbb{R}$
- Convexité :
  - définition à l'aide de l'inégalité de convexité $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$ si $t \in [0,1]$, position d'une courbe de fonction convexe par rapport à ses sécantes
  - **inégalité de Jensen**
  - caractérisation de la convexité par croissance des pentes : f est convexe sur I si et seulement si tous les taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ sont croissants sur $I \backslash \{a\}$
  - caractérisation de la convexité par la croissance de f' pour une fonction dérivable, position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses tangentes

Chapitre 13 : Arithmétique.

- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, **théorème de division euclidienne**, nombres premiers (existence d'une infinité de nombres premiers, crible d'Eratosthène), congruences dans $\mathbb{Z}$.
- Pgcd, ppcm (y compris d'une famille d'entiers), notation $n \wedge p$ et $n \vee p$, algorithme d'Euclide, théorèmes de Bézout et de Gauss (on doit être capable de calculer les coefficients de Bézout en utilisant l'algorithme d'Euclide étendu), entiers premiers entre eux, premiers entre eux dans leur ensemble.
- Valuations p-adiques, additivité des valuations p-adiques, théorème de décomposition en facteurs premiers, calcul du pgcd et du ppcm à l'aide de la décomposition en facteurs premiers et formule $(n \wedge p) \times (n \vee p) = n \times p$, **petit théorème de Fermat**.

Prévisions pour la semaine prochaine : arithmétique, dénombrement.