# Programme de colle n° 10

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 02/12 au 06/12 2024

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

## Chapitre 7 : Nombres complexes.

- Structure de l'ensemble $\mathbb{C}$ :
  - forme algébrique, parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe
  - identification de $\mathbb{C}$ avec le plan $\mathbb{R}^2$, image d'un nombre complexe dans le plan, affixe complexe d'un point du plan
  - somme, produit de deux nombres complexes, conjugué, module d'un nombre complexe et **propriétés élémentaires** (compatibilité du produit et du quotient avec la conjugaison et le calcul de module notamment), interprétation géométrique de la conjugaison et du module
  - inégalité triangulaire $||z| - |z|'| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (la **démonstration** de l'inégalité de droite peut être demandée)
  - équations de cercles (on doit être capable de reconnaitre un cercle à partir de n'importe quelle forme de son équation)
  - écriture exponentielle des nombres complexes de module 1, argument d'un nombre complexe, propriétés de l'argument
- Applications du calcul complexe en trigonométrie :
  - formules d'Euler, formule de Moivre
  - calcul de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$
  - linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$
  - factorisation par l'angle moitié pour obtenir la forme exponentielle d'expressions du type $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$, ou $e^{ip} + e^{iq}$, application aux formules trigonométriques de transformation somme-produit et au calcul de sommes du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$
- Résolution des équations du second degré à coefficients complexes (via calcul d'une racine carrée de $\Delta$ sous forme algébrique).
- Racines $n$-èmes de nombres complexes :
  - racines $n$-èmes de l'unité : formule explicite, interprétation géométrique (on doit savoir que les racines $n$-èmes forment un polygone régulier centré en l'origine), **nullité de la somme des racines $n$-èmes**
  - calcul des racines $n$-èmes d'un nombre complexe sous forme exponentielle

- Étude de quelques fonctions complexes, prétexte à questions d'interprétation géométrique (du style « Déterminer les nombres complexes $z$ pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$ » pour obtenir une équation de cercle)
- Application des nombres complexes à la géométrie :
  — affixe complexe d'un vecteur, calcul d'un produit scalaire ou d'un déterminant comme partie réelle ou imaginaire de $\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}}$
  — écriture complexe des translations, rotations, homothéties, symétries par rapport aux axes du repère
  — classification des isométries et similitudes du plan à l'aide des nombres complexes (on doit être capable, à partir de l'expression explicite d'une similitude directe, de déterminer son type, et le cas échéant son centre, son angle et son rapport ; on doit aussi pouvoir effectuer ce travail à partir de la donnée de deux points et de leurs images)

Prévisions pour la semaine suivante : suites numériques.