

TD n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

3 septembre 2024

Pour s'échauffer tranquillement pour ce premier TD de l'année, quoi de mieux qu'un petit sujet de bac? Le sujet suivant est en fait constitué d'un savant mélange de deux sujets de bac (ce qui explique le total de points légèrement supérieur à 20) qu'on qualifiera sobrement d'un peu anciens pour ne vexer personne (je précise quand même pour les curieux qu'ils ont été posés **avant** que je ne passe moi-même mon bac, donc à une période proche de la Préhistoire en ce qui vous concerne).

Exercice 1 (5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2. Soient K , L et M les points d'affixes respectives $z_K = 1 + i$, $z_L = 1 - i$ et $z_M = -i\sqrt{3}$. Placer ces points dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct. On complètera cette figure au fur et à mesure de la progression de l'exercice.
3. (a) On note N le symétrique du point M par rapport au point L . Vérifier que son affixe z_N est égale à $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.
(b) La rotation de centre O (origine du repère) et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en A et le point N en C . Déterminer les affixes z_A et z_C des points A et C .
(c) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ transforme le point M en D et le point N en B . Déterminer les affixes z_D et z_B des points D et B .
4. (a) Montrer que le point K est le milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$.
(b) Montrer que $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$.
(c) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 2 (5 points)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1. (a) Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Calculer la dérivée f' de f . En déduire u_0 .
(b) Calculer u_1 .
2. (a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante (sans chercher à calculer explicitement u_n). En déduire que (u_n) est convergente.
(b) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0, 1]$, on a $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq 2$.
En déduire un encadrement de la suite u_n valable pour $n \geq 1$, puis déterminer la limite de (u_n) .
3. Pour $n \geq 3$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$.
(a) Vérifier que, si $n \geq 3$, $u_n + u_{n-2} = I_n$.
Montrer à l'aide d'une intégration par parties portant sur I_n que $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.
(b) En déduire, toujours pour $n \geq 3$, que $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$.
(c) Exploiter les résultats précédents pour calculer la limite de la suite (nu_n) .

Problème (11 points)

On va étudier dans ce problème la famille de fonctions f_n (pour $n \in \mathbb{N}$) définies sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n(1 - \ln(x))$ si $x > 0$, et $f_n(0) = 0$.

On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal.

I. Étude générale des fonctions f_n .

1. (a) Montrer que toutes les fonctions f_n sont continues en 0.
(b) Discuter selon la valeur de n la dérivabilité de f_n en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
(c) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
2. (a) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, et préciser les valeurs de x pour lesquelles cette expression s'annule.
(b) En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$ et montrer que toutes courbes $(\mathcal{C}_n)$ partagent trois points communs.
3. (a) Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.
(b) Pour $n \geq 1$, déterminer une équation des tangentes à $(\mathcal{C}_n)$ en ses points d'abscisse 1 et e .
(c) En exploitant les résultats précédents, tracer sur un même graphique les courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_n)$.
4. Soit a un réel positif distinct de 0 et de e . On considère les points $M \in (\mathcal{C}_n)$ et $M' \in (\mathcal{C}_{n+1})$ de même abscisse a .
(a) On trace la droite (OM') , la droite passant par M et parallèle à l'axe des abscisses, et la droite d'équation $x = 1$. Montrer que ces trois droites sont concourantes.
(b) Expliquer comment construire graphiquement le point M' à partir du M . On tracera un exemple sur le graphique de la question 3.c.

II. Étude d'une suite d'intégrales.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e f_n(t) dt$.

1. Sans calculer cette intégrale, étudier la monotonie de la suite (I_n) .
2. En utilisant une intégration par parties, déterminer l'expression de I_n en fonction de n . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

III. Étude des solutions des équations $f_n(x) = 1$.

Dans cette dernière partie, $n \geq 2$.

1. On note x_n le réel non nul vérifiant $f'_n(x_n) = 0$. Montrer que $x_n \in [1, e]$, et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
2. Montrer que, sur l'intervalle $[x_n, e[$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution, qu'on notera α_n .
3. Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) > 1$. En déduire que la suite (α_n) est croissante.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.