Interrogation Écrite n° 6

MPSI Lycée Camille Jullian

17 avril 2025

1. • Comme $\dfrac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente, la série $\sum \dfrac{\cos(n)}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.
   • $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{2}{n^2+n-1}\right) \sim -\dfrac{2}{n^2+n-1} \sim -\frac{2}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente (à un facteur près), donc la série $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ converge.
   • Posons $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$, donc f est décroissante sur l'intervalle $[e,+\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3. Comme elle converge par ailleurs vers 0 (croissance comparée classique), le critère spécial des séries alternées assure que $\sum \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ converge.
2. Toutes les séries manipulées étant convergentes, on va travailler directement avec des sommes infinies : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum n = 0^{+\infty} \frac{n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - e + e = e$.
3. $\dfrac{2n-1}{n^3-4n} \sim \dfrac{2}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente, donc notre série converge. Pour calculer sa somme, on effectue une décomposition en éléments simples : $\dfrac{2n-1}{n^3-4n} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+2} + \dfrac{c}{n-2}$. On calcule les numérateurs par les méthodes habituelles (produit par le dénominateur puis évaluation à l'endroit où le dénominateur s'annulait) pour obtenir $a = \dfrac{-1}{2\times(-2)} = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{-5}{-2\times(-4)} = -\dfrac{5}{8}$ et $c = \dfrac{3}{2\times 4} = \dfrac{3}{8}$. On en déduit que $\displaystyle S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k^3-4k} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{4k} + \frac{3}{8(k-2)} - \frac{5}{8(k+2)} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{4k} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{3}{8k} - \sum_{k=5}^{n+2} \frac{5}{8k} = \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4(n-1)} + \frac{1}{4n} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} - \frac{5}{8(n-1)} - \frac{5}{8n} - \frac{5}{8(n+1)} - \frac{5}{8(n+2)}$, qui converge vers $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{32} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{32} = \dfrac{5}{6} + \dfrac{3}{32} = \dfrac{89}{96}$.
4. Il s'agit d'une somme de réels positifs, on peut donc directement travailler avec des sommes infinies : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{2p}} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{p^q}{q!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^p}{e^{2p}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^p = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$ (on utilise successivement une série exponentielle et une série géométrique de raison $\frac{1}{e} < 1$).
5. (a) Le critère spécial des séries alternées assure la convergence de $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

(b) La méthode rapide consiste à écrire que $\dfrac{1}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,dt$, donc par linéarité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k\,dt = \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$

(c) Encadrement trivial : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 t^{2n+2}\,dt = \frac{1}{2n+3}$, et le théorème des gendarmes permet de conclure.

(d) On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Si on connaît bien ses développements limités classiques, on sait que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$. Si on applique cette formule à $x = 1$ en admettant que la somme de droite tend bien vers la valeur souhaitée, on retrouve le résultat.