Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

20 février 2025

Énoncé :

1. Les racines (évidentes) du polynôme Q sont 1 et 2. Puisqu'on effectue une division par un polynôme de degré 2, le théorème de division euclidienne nous permet d'affirmer que $P_n = AQ + R_n$, avec $d^\circ(R_n) < 2$, donc $R_n = a_nX + b_n$. En évaluant cette égalité en 1, on obtient $2^n - 2 = a_n + b_n$, et en évaluant en 2, on obtient $3^n - 2^n - 1 = 2a_n + b_n$. Une simple soustraction de ces deux équations donne alors $a_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$, dont on déduit ensuite $b_n = 3 \times 2^n - 3^n - 3$, puis $R_n = (3^n - 2^{n+1} + 1)X + 3 \times 2^n - 3^n - 3$.

2. Les trois racines de notre polynôme peuvent donc être notées α, β et $\alpha + \beta$. Une première relation coefficients-racines permet alors d'affirmer que leur somme vérifie $2(\alpha+\beta) = 8$, donc $\alpha + \beta = 4$ est racine du polynôme. On peut donc le factoriser sous la forme $X^3 - 8X^2 + 23X - 28 = (X-4)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-4a)X^2 + (c-4b)X - 4c$. Une identitication des coefficients donne $a = 1$, $b - 4a = -8$ donc $b = -4$ et $c - 4b = 23$ donc $c = 7$, ce qui est cohérent avec la dernière condition. Le trinôme $X^2 - 4X + 7$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 28 = -12$ et donc pour racines complexes $\dfrac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3}$ et $2 + i\sqrt{3}$. Les trois racines du polynôme initial sont donc 4, $2 - i\sqrt{3}$ et $2 + i\sqrt{3}$.

3. Commenons donc par écrire $X^4 - 6X^3 + 9X^2 = X^2(X^2 - 6X + 9) = X^2(X-3)^2$. Ensuite $P = (X^2 - 3X)^2 - (3i)^2 = (X^2 - 3X - 3i)(X^2 - 3X + 3i)$. Cherchons les racines du premier facteur, qui a pour discriminant $\Delta = 9 + 12i$. On cherche un $\delta = a + ib$ vérifiant $\delta^2 = \Delta$, ce qui impose $a^2 - b^2 = 9$ et $2ab = 12$. De plus, $\Delta = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$, donc on peut ajouetr l'équation aux modules $a^2 + b^2 = 15$. En additionnant les deux équations extrêmes, $2a^2 = 24$, donc $a = \pm 2\sqrt{3}$, et en les soustrayant $2b^2 = 6$, donc $b = \pm\sqrt{3}$. Puisque a et b sont de même signe, on choisit par exemple $\delta = 2\sqrt{3} + \sqrt{3}i$, ce qui fournit les racines $z_1 = \dfrac{3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}i}{2} = \dfrac{3}{2} + \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, et $z_2 = \dfrac{3}{2} - \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Pas besoin de nouveau calcul pour obtenir les deux dernières racines du polynôme P, qui sont nécessairement les conjuguées des deux premières (puisque P est à coefficients réels), donc $z_3 = \dfrac{3}{2} + \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, et $z_4 = \dfrac{3}{2} - \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Pour la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, on peut pas faire mieux que $P = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)(X - z_4)$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les conjugués pour obtenir $P = (X^2 - (3 + 2\sqrt{3})X + 6 + 3\sqrt{3})(X^2 + (2\sqrt{3} - 3)X + 6 - 3\sqrt{3})$.

4. On calcule les polynômes d'interpolation correspondants (notés P_0, P_1, P_{-1} et P_2 pour simplifier) : $P_0 = \dfrac{(X-1)(X+1)(X-2)}{(0-1)(0+1)(0-2)} = \dfrac{X^3 - 2X^2 - X + 2}{2} = \dfrac{1}{2}X^3 - X^2 - \dfrac{1}{2}X + 1$; $P_1 = \dfrac{X(X+1)(X-2)}{(1-0)(1+1)(1-2)} = \dfrac{X^3 - X^2 - 2X}{-2} = -\dfrac{1}{2}X^3 + \dfrac{1}{2}X^2 + X$; $P_{-1} = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \dfrac{X^3 - 3X^2 + 2X}{-6} = -\dfrac{1}{6}X^3 + \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{3}X$; $P_2 = \dfrac{X(X-1)(X+1)}{(2-0)(2-1)(2+1)} = \dfrac{X^3 - X}{6} = \dfrac{1}{6}X^3 - \dfrac{1}{6}X$.

Il ne reste plus qu'à effectuer la combinaison linéaire (en fait, on a calculé P_1 pour rien puisque la fonction s'annule à cet endroit) : $P = P_0 - 2P_{-1} + 4P_2 = \frac{1}{2}X^3 - X^2 - \frac{1}{2}X + 1 + \frac{1}{3}X^3 - X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{2}{3}X^3 - \frac{2}{3}X = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1$.

5. (a) Il faut choisir les livres qu'on va mettre sur l'étagère, donc 8 livres sur les 10 que possède notre élève, puis les ordonner sur l'étagère, ce qui peut se faire de $8!$ façons. On a donc au total $\binom{10}{8} \times 8!$ possibilités, soit $\frac{10!}{2}$ rangements (ce qu'on peut voir autrement : on classe les 10 livres de $10!$ façons, puis on met les huit premiers sur l'étagère, et on laisse les deux derniers de côté ; pour ces deux derniers, l'ordre n'a plus d'importance, d'où la division par 2 dans la formule obtenue). On peut aussi écrire directement qu'il s'agit d'un arrangement de 8 livres parmi les 10 disponibles.

   (b) Si on impose tous les livres de maths, il ne reste plus que trois livres à choisir parmi les cinq autres avant de trier : $\binom{5}{3} \times 8!$ possibilités.

   (c) On choisit les six livres restants (parmi huit), puis on choisit à quelle position dans l'étagère on va placer le premier des deux livres de bridge (celu iqui est à gauche donc), ce qui laisse 7 possibilités, ainsi que l'ordre des deux livres de bridge (2 possibilités). Il reste à ordonner les autres livres, donc $\binom{8}{6} \times 7 \times 2 \times 6! = 7 \times 8!$ possibilités au total.

   (d) Il faut choisir quatre livres de maths parmi cinq, quatre autres livres parmi les cinq autres, trier les livres de maths de l'étagère ($4!$ possibilités), trier les autres livres (idem), et enfin choisir si on met tout à gauche le premier livre de maths, ou le premier livre « pas de maths », donc $\binom{5}{4}^2 \times (4!)^2 \times 2 = 5^2 \times 24^2 \times 2$ possibilités.