

Interrogation Écrite n° 5

MPSI Lycée Camille Jullian

20 février 2025

Énoncé :

1. Calculer le reste (mais **pas** le quotient) de la division euclidienne du polynôme $P_n = (X + 1)^n - X^n - 1$ par le polynôme $Q = X^2 - 3X + 2$ (on commencera par préciser les racines de Q).
2. Déterminer les racines du polynôme $P = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que l'une de ces racines est égale à la somme des deux autres.
3. Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ (on pourra commencer par factoriser $X^4 - 6X^3 + 9X^2$).
4. Déterminer explicitement l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(-1) = -2$ et $P(2) = 4$.
5. Un élève de MPSI souhaite ranger ses livres de cours dans son étagère. Il a cinq livres de maths, trois livres de physique et deux livres de bridge. Par ailleurs, pas de chance, il ne peut aligner que huit livres sur son étagère, il devra donc en laisser deux de côté (les livres seront rangés de gauche à droite dans l'étagère, tous en position verticale).
 - (a) Combien de dispositions différentes peut-on créer sur l'étagère (on considère que les livres de maths sont tous différents, idem pour ceux de physique ou de bridge) ?
 - (b) Combien de dispositions possibles contenant tous les livres de maths ?
 - (c) Combien de dispositions contenant les deux livres de bridge, et pour lesquelles ces deux livres sont côte à côte ?
 - (d) Combien de dispositions pour lesquelles on a une alternance stricte entre livres de maths et livres « pas de maths » (avec donc au total quatre livres de maths et quatre autres) ?