Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

23 janvier 2025

Énoncé :

1. Par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

2. Je vais bien entendu utiliser la méthode de la résolution de système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & a \\ 2x & + & y & + & 3z & = & b \\ 2x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$.
On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ pour obtenir le système équivalent $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & -3y & + & 5z & = & b-2a \\ & & -2y & + & 3z & = & c-2a \end{array}\right.$. On fait maintenant $L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$ pour arriver au système triangulaire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & -3y & + & 5z & = & b-2a \\ & & & & -z & = & 3c-2a-2b \end{array}\right.$. Il ne reste plus qu'à remonter le système : $z = 2a + 2b - 3c$, puis $y = \dfrac{2a - b + 5z}{3} = 4a + 3b - 5c$, et enfin $x = a - 2y + z = -5a - 4b + 7c$. La matrice est donc inversible, et $M^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. (a) On calcule $A_2^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $A_3^2 = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 9 & \frac{9}{2} & 3 \end{pmatrix}$. On constate que $A_2^2 = 2A$ et $A_3^2 = 3A$.

   (b) On imagine que $A_n^2 = nA_n$. On le vérifie en revenant à la définition du produit matriciel : le coefficient d'indice (i, j) de la matrice A_n^2 est égal à $\sum_{k=1}^{n} \frac{i}{k} \times \frac{k}{j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{j} = n \times \frac{i}{j}$, ce qui démontre la formule conjecturée.

4. (a) Calculons : $M^2 = \begin{pmatrix} 10 & 9 & -3 \\ -6 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On trouve ensuite facilement $M^2 = 3M - 2I_3$.

   (b) On peut donc écrire $\frac{3}{2}M - \frac{1}{2}M^2 = I_3$, soit $M\left(\frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}M\right) = I_3$. La matrice M est donc inversible, et $M^{-1} = \frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   (c) Calucons à nouveau : $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $N^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -N$. On en déduire $N^k = (-1)^{k-1}N$ (qu'on démontre par récurrence triviale si on y tient vraiment).

(d) On a $M^n = (N+2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \times 2^{n-k} I_3$. On remplace N^k par la formule précédente, mais elle n'est valable que pour $k \geq 1$, donc on sort de la somme le terme numéro 0 : $M^n = 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} 2^{n-k} N = 2^n I_3 + \left(2^n - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{n-k} \right) N = 2^n I_3 + (2^n - 1)N$.

(e) La formule donnerait $M^{-1} = \frac{1}{2} I_3 - \frac{1}{2} N = \frac{1}{2} I_3 - \frac{1}{2} M + I_3 = \frac{3}{2} I_3 - \frac{1}{2} M$, ce qui est effectivement la formule obtenue pour M^{-1}.