

Interrogation Écrite n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

23 janvier 2025

Énoncé :

1. Donner un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont **aucun** coefficient n'est nul mais vérifiant $M^2 = 0$.
2. Calculer par la méthode de votre choix l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. L'inverse obtenu doit avoir tous ses coefficients entiers.
3. On note $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$, puis plus généralement $A_n = \left(\frac{i}{j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$.
 - (a) Calculer A_2^2 et A_3^2 . Que constate-t-on d'intéressant ?
 - (b) Généraliser en conjecturant une formule pour A_n^2 , puis démontrer cette formule.
4. On note $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $N = M - 2I_3$.
 - (a) Calculer M^2 , et déterminer deux réels a et b tels que $M^2 = aM + bI_3$.
 - (b) En déduire que M est inversible, et calculer explicitement M^{-1} (avec tous ses coefficients)
 - (c) Calculer N^2 , puis plus généralement N^k pour tout entier $k \geq 1$.
 - (d) En exploitant la formule du binôme de Newton, calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$ (on doit trouver une expression qui est une combinaison linéaire de I_3 et N).
 - (e) L'expression obtenue à la question précédente est-elle valable pour $n = -1$?