Interrogation Écrite n° 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

12 décembre 2024

1. Une petite multiplication par la quantité conjuguée s'impose : $u_n = \frac{n^2 + n + 1 - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})} + \sqrt{n^2(n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$, d'où on déduit facilement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{2} = 1$.
2. On commence par écrire le membre de droite sous forme exponentielle : $2i - 2 = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. En posant $z = a + ib$, on aura $e^z = e^a \times e^{ib}$, donc par identification des formes exponentielles, z est solution de l'équation si $e^a = 2\sqrt{2}$ et $b \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$, donc si $z = \frac{3}{2} \ln(2) + i\frac{3k\pi}{4}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Pour le calcul direct astucieux, on multiplie par r (la raison de la suite arithmétique) la somme à calculer : $r \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - u_0}{u_0 u_{n+1}}$ par télescopage. Or, $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$, donc $r \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{(n+1)r}{u_0 u_{n+1}}$. Il ne reste plus qu'à diviser par r de chaque côté pour obtenir le résultat souhaité.
Sinon, par récurrence, pour $n = 0$, la somme vaut $\frac{1}{u_0 u_1}$ et le membre de droite de l'égalité demandée aussi, donc la propriété est vérifiée. Si on la suppose au rang n , alors $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} + \frac{1}{u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{(n+1)}{u_0 u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{(n+1)u_{n+2} + u_0}{u_0 u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{(n+1)(u_0 + (n+2)r) + u_0}{u_0 u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{(n+2)(u_0 + (n+1)r)}{u_0 u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{n+2}{u_0 u_{n+2}}$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence.
4. L'expression de f étant de la forme $az + b$, il s'agit d'une similitude directe. On calcule $|2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$, donc $2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Pour obtenir le centre de la similitude, on résout l'équation $f(z) = z$, soit $(1 + 2i)z = 7 + 4i$, donc $z = \frac{7 + 4i}{1 + 2i} = \frac{(7 + 4i)(1 - 2i)}{1 + 4} = \frac{15 - 10i}{5} = 3 - 2i$. L'application f est donc la similitude directe de centre $A(3 - 2i)$, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
5. La suite (u_n) est définie par les conditions suivantes : $u_0 = \ln(2)$, $u_1 = 4 \ln(2)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

- (a) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ a pour racine évidente $x_1 = 1$ et pour deuxième racine $x_2 = -\frac{1}{2}$, donc il existe deux réels A et B tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + B \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Les conditions initiales imposent $u_0 = \ln(2) = A + B$ et $u_1 = 4\ln(2) = A - \frac{1}{2}B$. En soustrayant les deux équations, on obtient $\frac{3}{2}B = -3\ln(2)$, donc $B = -2\ln(2)$, puis $A = 3\ln(2)$. Finalement, $u_n = \ln(2) \left(3 - 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Toute suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ ayant une limite nulle, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = A = 3\ln(2)$.
- (b) Pour que la suite soit correctement définie, on doit avoir $v_n > 0$ pour tout entier naturel n , ce qui se démontre par une récurrence double triviale. Ensuite, on constate qu'en posant $u_n = \ln(v_n)$ (oui, le choix de notation de cette suite auxiliaire est volontaire), $u_{n+2} = \frac{1}{2} \ln(v_{n+1}) + \frac{1}{2} \ln(u_n) = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$, avec $u_0 = \ln(2)$ et $u_1 = \ln(16) = 4\ln(2)$. Bon, ben c'est exactement la suite (u_n) de la première question, et on a donc $v_n = e^{u_n} = 2^{3-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.
6. On constate que -1 est solution évidente de cette équation : $(-1)^3 - 2(-1)^2 + i + 3 - i = -1 - 2 + 3 = 0$. On peut on factoriser le membre de gauche sous la forme $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = (z + 1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b + a)z^2 + (c + b)z + c$. Par identification, $a = 1$, $b + a = -2$ donc $b = -3$ et $c + b = -i$, donc $c = 3 - i$, ce qui est cohérent avec le coefficient constant. Il reste à résoudre l'équation du second degré $z^2 - 3z + 3 - i = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 4(3 - i) = -3 + 4i$. On cherche un nombre complexe $\delta = a + ib$ vérifiant $\delta^2 = -3 + 4i$, donc $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = 4$. On ajoute l'équation aux modules $a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{9 + 16} = 5$. En ajoutant et soustrayant la première et la troisième équation, on a $2a^2 = 2$ donc $a = \pm 1$ et $2b^2 = 8$ donc $b = \pm 2$. Les deux réels étant de même signe, on peut choisir $\delta = 1 + 2i$, et les solutions de l'équation sont $z_1 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i$, et $z_2 = \frac{3 - 1 - 2i}{2} = 1 - i$. Finalement, $\mathcal{S} = -1, 1 - i, 2 + i$.