Interrogation Écrite n° 3

MPSI Lycée Camille Jullian

12 décembre 2024

Énoncé :

1. Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 2i - 2$.

3. Soit (u_n) une suite arithmétique qui ne s'annule jamais. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$ (on pourra au choix effectuer un calcul direct astucieux, ou procéder par récurrence).

4. Caractériser géométriquement l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (2+2i)z - 7 - 4i \end{array} \right.$

5. La suite (u_n) est définie par les conditions suivantes : $u_0 = \ln(2)$, $u_1 = 4\ln(2)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$.
   (a) Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n, ainsi que la limite éventuelle de la suite quand n tend vers $+\infty$.
   (b) La suite (v_n) est définie par $v_0 = 2$, $v_1 = 16$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1} \times v_n}$. Justifier que (v_n) est bien définie, puis calculer v_n en fonction de n, en exploitant les calculs de la première question.

6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$.