Interrogation Écrite n° 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

15 octobre 2024

Énoncé :

1. On va bien sûr procéder à une IPP, en posant $u(t) = t$, donc $u'(t) = 1$, et $v'(t) = \sin(3t)$ qu'on intègre en $v(t) = -\frac{1}{3} \cos(3t)$. On en déduit que $I_1 = \left[-\frac{1}{3}t \cos(3t)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{3} \cos(3t) dt = \frac{\pi}{3} + \left[\frac{1}{9} \sin(3t)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{3}$.
2. Ici, on a à un facteur près une forme $u' \sqrt{u}$ qui est la dérivée (à un facteur près aussi) de $u^{\frac{3}{2}}$, donc on peut intégrer directement : $I_2 = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.
3. Ici, il n'y a rien de plus à faire que de calculer directement l'intégrale en séparant en deux par linéarité : $I_3 = \int_0^1 \frac{4+x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{4}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = [4 \arctan(x)]_0^1 + \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1)\right]_0^1 = \pi + \frac{1}{2} \ln(2)$.
4. On va commencer ici par une IPP, en posant $u(t) = \ln(1+t)$, donc $u'(t) = \frac{1}{1+t}$, et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$ qu'on intègre en $v(t) = -\frac{1}{t}$. On obtient alors $I_4 = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)} dt = -\frac{1}{2} \ln(3) + \ln(2) + J$, avec $J = \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)} dt$ qu'on va calculer à l'aide d'une petite décomposition en éléments simples. On aura $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t}$. On calcule les coefficients constants a et b par la méthode habituelle : en multipliant par t puis en posant $t = 0$, on a $1 = a$. En multipliant par $1+t$ puis en posant $t = -1$, on a $-1 = b$. On en déduit que $J = \int_1^2 \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt = [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^2 = \ln(2) - \ln(3) + \ln(2) = 2 \ln(2) - \ln(3)$. Il ne reste plus qu'à conclure : $I_4 = 3 \ln(2) - \frac{3}{2} \ln(3)$.
5. Il faut faire ici une décomposition en éléments simples : le dénominateur $t^2 - 2t - 3$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$ et admet pour racines $t_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $t_2 = \frac{2+4}{2} = 3$. On peut donc trouver deux constantes a et b telles que $\frac{1}{t^2 - 2t - 3} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-3}$. On calcule les coefficients par la méthode habituelle : multiplication par $t+1$ puis $t = -1$ pour obtenir $\frac{-1}{-4} = a$, donc $a = \frac{1}{4}$, et multiplication par $t-3$ puis $t = 3$ pour obtenir $\frac{3}{4} = b$. Reste à achever le calcul : $I_5 = \int_1^2 \frac{1}{4(t+1)} + \frac{3}{4(t-3)} dt = \left[\frac{1}{4} \ln(t+1) + \frac{3}{4} \ln(3-t)\right]_1^2 = \frac{1}{4} \ln(3) - \frac{1}{4} \ln(2) - \frac{3}{4} \ln(2) = \frac{1}{4} \ln(3) - \ln(2)$.

6. On va bien sûr faire ce qui nous est conseillé : on pose $t = e^x$, ou $x = \ln(t)$. Les bornes de l'intégrale deviennent 1 et e , et l'élément différentiel $dx = \frac{1}{t} dt$. De plus $e^{2x} = e^{2\ln(t)} = t^2$, donc l'intégrale devient $I_6 = \int_1^e \frac{t^2}{t+1} \times \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{t}{t+1} dt = \int_1^e \frac{t+1-1}{1+t} dt = \int_1^e 1 - \frac{1}{1+t} dt = [t - \ln(1+t)]_1^e = e - \ln(1+e) - 1 + \ln(2)$.