Interrogation Écrite n° 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

26 septembre 2024

1. Soit $f : E \to F$ une application.
   - f injective : $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
   - f surjective : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.

2. Dans l'ordre de ce qui est demandé par l'énoncé :
   - $2 \leq x \leq 4$ et $-5 \leq y \leq -1$ donc en additionnant $-3 \leq x + y \leq 3$.
   - $1 \leq -y \leq 5$, donc $3 \leq x - y \leq 9$.
   - pour le produit, on fait attention aux valeurs négatives prises par y : $-20 \leq xy \leq -2$.
   - $-1 \leq \dfrac{1}{y} \leq -\dfrac{1}{5}$, donc $-4 \leq \dfrac{x}{y} \leq -\dfrac{2}{5}$.
   - enfin, on pourrait être tenté d'encadrer x^2 et $-y^2$ et de faire la somme des deux encadrement pour obtenir celui de $-23 \leq x^2 - y^2 \leq 15$, mais on peut aussi penser à écrire $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ et multiplier les deux premiers encadrement obtenus plus haut, ce qui donne $-27 \leq x^2 - y^2 \leq 27$. Le premier encadrement est manifestement nettement meilleur, et on ne peut pas faire mieux puisque les valeurs -23 et 15 sont atteintes (pour $x = 2$ et $y = -5$ pour -23, et $x = 4$ et $y = -1$ pour 15).

3. Il n'y a pas d'autre choix que de faire un joli tableau : $2 - x$ s'annule pour $x = 2$, $2x + 1$ pour $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x + 1$ pour $x = -1$, et on a les expressions suivantes selon les intervalles :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\lvert 2-x\rvert$		$2-x$		$2-x$		$2-x$	0	$x-2$	
$\lvert 2x+1\rvert$		$-2x-1$		$-2x-1$	0	$2x+1$		$2x+1$	
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$		$x+1$	
$\lvert 2-x\rvert + \lvert 2x+1\rvert - \lvert x+1\rvert$		$-2x+2$		$-4x$		2		$2x-2$	

   On résout ensuite sur chaque intervalle, en ne conservant que les solutions (éventuelles) convenables :
   - sur $]-\infty, -1]$, $-2x + 2 < 4 \Leftrightarrow x > -1$, donc $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
   - sur $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$ $-4x < 4 \Leftrightarrow x > -1$, donc $\mathcal{S}_2 = \left]-1, -\dfrac{1}{2}\right]$.
   - l'inégalité $2 < 4$ est évidemment vérifiée sur tout l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}, 2\right]$.
   - enfin, sur $[2, +\infty[$, $2x - 2 < 4 \Leftrightarrow x < 3$, donc $\mathcal{S}_4 = [2, 3[$.

   Conclusion : $\mathcal{S} =]-1, 3[$.

4. On pose bien sûr $X = \ln(x)$ pour se ramener à l'inéquation du troisième degré $X^3 + 3X^2 - 2X - 2 \leq 0$. Le polynôme du membre de gauche a pour racine évidente $X = 1$ (puisque $1 + 3 - 2 - 2 = 0$), on peut le factoriser sous la forme $X^3 + 3X^2 - 2X - 2 = (X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$. Par identification des coefficients, on obtient $a = 1$, $b - a = 3$ donc

$b = 4$, et $c - b = -2$, donc $c = 2$ (cohérent avec le coefficient constant). Le trinôme $X^2 + 4X + 2$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 8 = 8$, et admet pour racines $X_1 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2}$, et $X_2 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2}$. En mettant les racines dans le bon ordre, le signe de notre polynôme du troisième degré est donné par :

X		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		1	
$X^3 + 3X^2 - 2X - 2$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On n'oublie pas de mettre des exponentielles autour de tout ça pour revenir à la variable x : $\mathcal{S} =]0, e^{-2-\sqrt{2}}] \cup [e^{-2+\sqrt{2}}, e]$.

5. On commence par tout passer du même côté pour obtenir l'inéquation équivalente $\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 9} > 0$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 4 + 32 = 36$, et pour racines $x_1 = \dfrac{-2 - 6}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-2 + 6}{2} = 2$. Il est temps de faire un gros tableau de signes :

x		-4		-3		2		3	
$x^2 + 2x - 8$	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$x^2 - 9$	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
$\frac{x^2+2x-8}{x^2-9}$	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$

Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]-3, 2[\cup]3, +\infty[$.

6. Commençons par préciser que l'inéquation n'est définie que sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. Sur cet intervalle, les deux membres de l'inéquation sont positifs, on peut donc élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $2x - 1 < x + 1 + 2\sqrt{x+1} + 1$, soit $x - 3 < 2\sqrt{x+1}$. On distingue alors deux cas :

   - si $x < 3$, le membre de gauche de notre nouvelle inéquation étant négatif, elle est trivialement vérifiée. Tout l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 3\right[$ est donc solution.
   - si $x \geq 3$, tout est positif et on peut à nouveau élever au carré pour trouver $x^2 - 6x + 9 < 4(x+1)$, soit $x^2 - 10x + 5 < 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 100 - 20 = 80$, et pour racines $x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{80}}{2} = 5 - \sqrt{20} = 5 - 2\sqrt{5}$, et $x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{80}}{2} = 5 + 2\sqrt{5}$. Notre trinôme est négatif entre ses racines, ce qui combiné avec la condition $x \geq 3$ nous donne l'intervalle de solutions supplémenataire $[3, 5 + 2\sqrt{5}[$.

   Conclusion : $\mathcal{S} = \left[\dfrac{1}{2}, 5 + 2\sqrt{5}\right[$.