Devoir Surveillé n° 9

MPSI Lycée Camille Jullian

10 mai 2025

Exercice 1

On s'intéresse dans cet exercice à la série $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$. On notera $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$ la somme partielle de cette série. On note de plus $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
   (b) Montrer à l'aide de ces DL que $w_{n+1} - w_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.
   (c) En déduire la convergence de de la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$, puis la convergence de la suite (w_n) vers un réel qu'on notera désormais γ (et qu'on ne cherchera pas à calculer).
   (d) Redémontrer à l'aide des résultats précédents le résultat classique du cours sur l'équivalent de la somme partielle $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ de la série harmonique.
2. Démontrer rigoureusement la convergence de la série (S_n) à l'aide du critère spécial des séries alternées. La série est-elle absolument convergente (une justification précise de la réponse est attendue) ?
3. Exprimer S_5 et S_6 en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$. Donner une valeur approchée de ces deux sommes (on rappelle que $\ln(2) \simeq 0.69$, $\ln(3) \simeq 1.10$ et $\ln(5) \simeq 1.61$).
4. On note désormais, pour tout entier non nul, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln^2(n)}{2}$.
   (a) Justifier que $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est décroissante puis qu'elle converge.
5. Montrer que $S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$, puis que $S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\ln(n)$.
6. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln^2(2)}{2}$.
7. En partant de l'encadrement $0 < S_5 < S_6 < \frac{1}{3}$ (qui découle des calculs normalement effectués question 3), donner un encadrement de la constante γ (on donnera une valeur approchée du minorant et du majorant obtenus).

Exercice 2

Dans tout cet exercice, on note Q le polynôme défini par $Q = X(X-4)$. On note également $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(4) = 0\}$.

A. Étude d'applications linéaires.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$, et donner sa dimension.
2. On note, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = QP$. Montrer que l'application f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ vers E.
3. En déduire une base de l'espace vectoriel E.
4. On note désormais, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\Delta(P)$ le polynôme défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
   (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de Δ (on en donnera une base), ainsi que la matrice représentative de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Montrer que $\Delta^3 = 0$ (comme toujours pour une application linéaire, Δ^3 désigne ici la composée $\Delta \circ \Delta \circ \Delta$).
5. On définit enfin une troisième application linéaire g par $g = f \circ \Delta \circ f^{-1}$.
   (a) De quel espace vectoriel g est-il un endomorphisme ?
   (b) Montrer que $g^3 = 0$.
   (c) Calculer le noyau et l'image de g (on en donnera à nouveau une base).
   (d) Montrer que g admet 0 comme unique valeur propre. L'endomorphisme g est-il diagonalisable (on justifiera soigneusement la réponse donnée) ?

B. Étude d'un produit scalaire.

Un produit scalaire sur un espace vectoriel E est une application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \varphi(u,v) \end{array} \right.$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- bilinéarité : l'application $\varphi_1 : v \mapsto \varphi(u,v)$ est linéaire quel que soit le vecteur $u \in E$, et l'application $\varphi_2 : u \mapsto \varphi(u,v)$ est linéaire quel que soit le vecteur v.
- symétrie : $\forall (u,v) \in E^2$, $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$.
- définie positivité : $\forall u \in E$, $\varphi(u,u) \geqslant 0$, et $\varphi(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

On pose désormais, $\forall (P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_4[X])^2$, $\varphi(P_1,P_2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} P_1(k)P_2(k)$.

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$.
2. On note $L_1 = (X-2)(X-3)$, $L_2 = (X-1)(X-3)$ et $L_3 = (X-1)(X-2)$. Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner ensuite les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ dans cette base, en fonction de $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$.
3. Montrer que la matrice dans la base (L_1, L_2, L_3) de l'endomorphisme Δ étudié en première partie est donnée par $M = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ (on attend évidemment le détail des calculs dans la mesure où le résultat vous est donné).
4. On note, $\forall i \in \{1,2,3\}$, $M_i = QL_i$, où Q est le polynôme défini en début d'exercice. Montrer que $M_i(i) \neq 0$,

5. On note enfin $N_i = \dfrac{1}{M_i(i)} M_i$. Montrer que la famille (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormale de E, c'est-à-dire une base de E pour laquelle $\varphi(N_i, N_j) = 0$ lorsque $i \neq j$, et $\varphi(N_i, N_i) = 1$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
6. Déterminer la matrice représentative de l'application f dans les bases (L_1, L_2, L_3) pour l'espace de départ, et (N_1, N_2, N_3) pour l'espace d'arrivée.
7. Déterminer la matrice représentative de l'endomorphisme g dans la base (N_1, N_2, N_3) de E (on essaiera d'effectuer ce calcul de façon purement matricielle).
8. On définit enfin un endomorphisme u (on ne demande pas de vérifier que c'en est un) sur $\mathbb{R}_4[X]$ en posant $u(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} P(i) N_i$. Montrer que u est un projecteur et que, $\forall P \in \mathbb{R}_4[X]$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $P - u(P)$ est un polynôme orthogonal au polynôme N_i, c'est-à-dire que $\varphi(P - u(P), N_i) = 0$. On parle de projection orthogonale pour un projecteur vérifiant cette propriété.

Problème (ESSEC 2016)

Dans tout le problème, E désigne l'ensemble de toutes les fonctions continues sur le segment $[0, 1]$. Lorsque la série correspondante converge, on note $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$. Naturellement, aucune connaissance sur les séries de fonctions ne sera nécessaire pour répondre aux questions posées.

I. Étude de la fonction φ.

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ fixé, la série $\sum \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$ est convergente. On notera désormais $D = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, et on a donc $\mathcal{D}_\varphi = D$.
2. Montrer que la fonction φ est impaire, puis qu'elle est 1-périodique (on pourra commencer par décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{2x}{n^2 - x^2}$ à n fixé).
3. On pose pour cette question $g(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$.
   (a) Montrer que g est définie sur $D \cup \{0, 1\}$ et que $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1 - x} + \dfrac{1}{1 + x} - g(x)$.
   (b) Soit $h \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$, montrer que, $\forall x \in [0, 1]$, $|g(x+h) - g(x)| \leqslant C|h|$, où $C = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)(n - \frac{3}{2})}$ (constante qu'on ne cherchera absolument pas à calculer).
   (c) En déduire que g est continue sur $[0, 1]$, puis que φ est continue sur D.
4. Montrer que $\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et que $\varphi(x) \underset{x \to 0}{=} \dfrac{1}{x} + o(1)$. Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

II. Étude d'un opérateur linaire.

On note T l'application linéaire définie sur l'espace vectoriel E par $T(f) = \tilde{f}$, où $\tilde{f}(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$. On notera par ailleurs $F_n = \mathbb{R}_n[X]$, vu comme un sous-espace vectoriel de E (autrement dit, on identifiera systématiquement les polynômes de F_n avec les fonctions polynômiales correspondantes de E).

1. Restriction de T à F_n :

(a) Vérifier que la restriction de T à F_n est un endomorphisme de F_n. On note cette restriction T_n.
(b) Déterminer la matrice de T_3 dans la base canonique de F_3.
(c) (Question difficile à traiter avec vos connaissances de première année, à ne chercher que si vous avez du temps) Quelles sont les valeurs propres de T_3 ? S'agit-il d'un endomorphisme diagonalisable ?

2. Étude du noyau de $T - 2\,id$:
   (a) Montrer que $\ker(T - 2\,id) \neq \{0\}$. Que peut-on en déduire sur l'application $T - 2\,id$?
   (b) Soit $f \in \ker(T - 2\,id)$, on note m et M le minimum et le maximum de f sur le segment $[0, 1]$. Pourquoi est-on certain que ces valeurs existent ?
   (c) Soit $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = m$. Montrer que $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$. En déduire que $m = f(0)$.
   (d) Montrer de façon similaire que $M = f(0)$, en déduire une base de $\ker(T - 2\,id)$.
3. Étude d'une fonction cotangente :
   (a) On définit une fonction g sur D par $g(x) = \pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$. Montrer que g est impaire et 1-périodique.
   (b) Montrer que $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$, puis $g(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x} - \dfrac{\pi^2}{3}x + o(x)$.
   (c) Obtenir des résultats similaires quand x tend vers 1.
   (d) Montrer que, $\forall x \in D$, $g\left(\dfrac{x}{2}\right) + g\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2g(x)$.
4. Calcul de φ :
   (a) Vérifier que, $\forall x \in D$, $\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) + \varphi\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$.
   (b) Montrer que $\varphi - g$ est une fonction prolongeable par continuité au segment $[0, 1]$.
   (c) Déduire des questions précédentes que, $\forall x \in D$, $\pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$.
5. Application à un calcul de somme de série bien connu :
   (a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - xg(x)}{2x^2}$.
   (b) Pour $x \in]0, 1[$, on pose $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

      Vérifier que $\left|h(x) - \dfrac{x^2}{1 - x^2}\right| \leqslant x^2 \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2(n^2 - 1)}$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.
   (d) En déduire la valeur de $\zeta(2)$.