

Devoir Surveillé n° 7

MPSI Lycée Camille Jullian

15 mars 2025

Exercice 1

1. Il faut choisir seize garçons parmi les 18 pour former l'équipe de garçons, et seize filles parmi les 24 pour l'équipe de filles, ce qui fait $\binom{18}{16} \times \binom{24}{16} = 112\,527\,063$. Eh oui, quand même, c'est déjà très gros (je ne donnerai pas les applications numériques suivantes, elles sont sans intérêt). Si vous avez considéré qu'il fallait en plus choisir tout de suite les onze titulaires de chaque équipe, il faut encore multiplier ce résultat par $\binom{16}{11}^2$ (on choisit les titulaires indépendamment pour chaque équipe), pour obtenir un nombre de possibilités dépassant 2×10^{15} .
2. On choisit les huit garçons de la première équipe, puis les huit filles, puis les huit garçons de la deuxième équipe (parmi ceux encore disponibles) et enfin les huit filles de la deuxième équipe. Mais attention, si on échange tous les joueurs des deux équipes, on aura en fait formé les deux même équipes, il faut donc diviser le résultat par 2, ce qui donne $\frac{1}{2} \times \binom{18}{8} \times \binom{24}{8} \times \binom{10}{8} \times \binom{16}{8}$ possibilités différentes. Tout cela donne encore nettement plus de choix possibles qu'à la première question.
3. C'est beaucoup plus simple, on choisit deux fois de suite seize élèves, et on divise par deux pour la même raison qu'à la question précédente : $\frac{1}{2} \times \binom{42}{16} \times \binom{26}{16}$ possibilités.
4. (a) On choisit (parmi les 16 joueurs disponibles) les onze qui doivent être titulaires, puis on leur attribue un poste à chacun, ce qui revient à imposer un ordre, donc $\binom{16}{11} \times 11!$ possibilités. Plus simplement, on peut aussi choisir poste par poste le joueur qui va l'occuper (d'abord le gardien, puis le premier défenseur etc), ce qui revient à créer un arrangement de onze élèves (l'ordre est important pour savoir qui va jouer à quel poste) parmi les seize, donc $\frac{16!}{5!}$ choix possibles.
(b) Il faut donc choisir l'unique garçon titulaire, puis ordonner les postes : $\binom{6}{1} \times 11! = 6 \times 11!$ possibilités.
(c) On choisit les cinq garçons qui vont jouer aux postes imposés, puis leur ordre, ce qui donne déjà $\binom{6}{5} \times 5! = 6!$ possibilités. Il reste ensuite à répartir les six postes restants sur les 11 joueurs encore disponibles (les dix filles et le dernier garçon, dont on n'a pas imposé qu'il doit être remplaçant), il s'agit à nouveau d'arrangements, donc $\frac{11!}{5!}$ possibilités. Finalement, on a au total $6 \times 11!$ possibilités, soit exactement le même nombre que pour la question précédente (mais c'est une coïncidence).

- (d) On choisit le gardien (seulement six possibilités, on veut que ce soit un garçon), puis on choisit le garçon qui va être défenseur et quel poste de défenseur il va occuper (5×4 possibilités), on enchaîne avec le garçon milieu de terrain (4×4 possibilités) et on continue avec le garçon attaquant (3×2 possibilités). Enfin, on effectue un arrangement des dix filles pour les sept postes restants : $\frac{10!}{3!}$ choix possibles. Au total, on a donc $\frac{6!}{2!} \times 4^2 \times 2 \times \frac{10!}{3!}$ choix possibles.
5. L'énoncé sous-entend qu'on va juste choisir les joueurs titulaires mais pas leur poste (sinon, il faut multiplier le résultat proposé par $11!$). Si on veut faire rentrer les cinq joueurs qui étaient remplaçants au premier match, il ne reste donc qu'à choisir six joueurs parmi les onze qui étaient titulaires pour compléter l'équipe, donc $\binom{11}{6}$ possibilités.
6. S'il n'y a rien d'autre d'imposé, on a donc 14 joueurs à disposition, et $\binom{14}{11}$ choix possibles.

Exercice 2

- Allons-y : $P'_0 = 0$ donc $P_1 = 2XP_0 = 2X$. Ensuite, $P'_1 = 2$, donc $P_2 = 2X \times 2X - \frac{1}{2}(1+X^2) \times 2 = 4X^2 - (1+X^2) = 3X^2 - 1$. Enfin, $P'_2 = 6X$, donc $P_3 = 2X(3X^2 - 1) - \frac{1}{3}(X^2 + 1) \times 6X = 6X^3 - 2X - 2X^3 - 2X = 4X^3 - 4X$.
- On va bien sûr procéder par récurrence : au rang 0, le polynôme P_0 est de degré 0. Si on suppose P_n de degré inférieur ou égal à n , alors $d^*(P') \leq n-1$, donc $d^*(1+X^2)P'_n \leq n+1$, et P_{n+1} est alors la somme de deux polynômes de degré inférieur ou égal à $n+1$, et donc lui-même de degré inférieur ou égal à $n+1$, ce qui prouve l'hérédité de la récurrence.
- Si le terme de degré n de P_n vaut $a_n X^n$, alors P'_n a un terme de degré $n-1$ (ou de degré $-\infty$ si $n=0$, ce qui ne perturbe pas le calcul) égal à $na_n X^{n-1}$, et le terme de degré $n+1$ du polynôme P_{n+1} est obtenu en calculant $2a_n X^{n+1} - \frac{1}{n+1} \times na_n X^{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} a_n X^{n+1}$, ce qui prouve exactement que $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$.
- Puisque $a_0 = 1$, une récurrence triviale permet de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = n+1$. En particulier, ce coefficient ne s'annule jamais, et puisqu'on a déjà prouvé que P_n était de degré inférieur ou égal à n , on en déduit que P_n est en fait de degré exactement n , et de coefficient dominant $a_n = n+1$.
- Si P_n est pair, P'_n sera impair, donc $(1+X^2)P'_n$ aussi, et $2XP_n$ sera également impair (à cause du produit par X), donc P_{n+1} sera impair. De même, si P_n est impair, alors P_{n+1} est pair. Les polynômes changent donc de parité à chaque fois. Comme P_0 est pair, P_n est de la même parité que n pour tout entier n .
- (a) Assez curieusement, il est assez nécessaire de faire une récurrence ici. Pour $n=0$, $P'_1 = 2$, ce qui est bien égal à $2P_0$. Supposons désormais que $P'_n = (n+1)P_{n-1}$ (donc on suppose l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$), alors $P_{n+1} = 2XP_n - (1+X^2)P'_{n-1}$. Dérivons cette égalité : $P'_{n+1} = 2P_n + 2XP'_n - 2XP_{n-1}(1+X^2)P'_{n-1} = 2P_n + 2(n+1)XP_{n-1} - 2XP_{n-1} - (1+X^2)P'_{n-1} = 2P_n + 2nXP_{n-1} - (1+X^2)P'_{n-1}$. Or, en décalant la relation de récurrence initiale, $P_n = 2XP_{n-1} - \frac{1}{n}(1+X^2)P'_{n-1}$. On en déduit que $(1+X^2)P'_{n-1} = 2nXP_{n-1} - nP_n$ puis en reportant dans la relation précédente, $P'_{n+1} = 2P_n + 2nXP_{n-1} - 2nXP_{n-1} + nP_n = (n+2)P_n$, exactement ce qu'on voulait démontrer pour prouver l'hérédité de la récurrence.
- (b) Pour n impair, on sait déjà que $P_n(0) = 0$ puisque le polynôme est impair. Pour les entiers pairs, on constate (relation de récurrence initiale appliquée au rang $2n-1$) que $P_{2n}(0) = -\frac{1}{2n}P'_{2n-1}(0) = -\frac{1}{2n} \times 2nP_{2n-2}(0)$ en exploitant la question précédente. Bref,

$P_{2n}(0) = -P_{2n-2}(0)$. On en déduit facilement que $P_{2n}(0) = (-1)^n$ (il faudrait rédiger une récurrence si on veut être super rigoureux).

(c) C'est complètement trivial en exploitant le résultat de la question a.

7. (a) En décalant la relation de récurrence, $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - \frac{1}{n+2}(1+X^2)P'_{n+1} = 2XP_{n+1} - (1+X^2)P_n$ à l'aide de la formule obtenue question 6.a pour la dérivée. On a prouvé la relation demandée.

(b) La suite (u_n) vérifie $u_{n+2} = 2xu_{n+1} - (1+x^2)u_n$, c'est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (la valeur de x est fixée). On va noter r la variable de l'équation caractéristique pour éviter les confusions : $r^2 - 2xr + (1+x^2) = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4x^2 - 4(1+x^2) = -4$, on a donc deux racines complexes : $r_1 = \frac{2x+2i}{2} = x+i$ et $r_2 = \frac{2x-2i}{2} = x-i$. On en déduit l'existence de deux constantes (complexes!) A et B telles que $P_n(x) = A(x+i)^n + B(x-i)^n$. Au rang 0, cela donne $1 = A+B$, au rang 1, on a $2x = A(x+i) + B(x-i) = (A+B)x + i(A-B)$. Comme $B = 1-A$, on a donc $2x = x+i(2A-1)$, soit $-ix = 2A-1$, donc $A = \frac{-ix+1}{2} = \frac{x+i}{2i}$, puis $B = 1-A = \frac{i-x}{2i}$.
Finalement, $u_n = \frac{(x+i)^{n+1}}{2i} - \frac{(x-i)^{n+1}}{2i}$.

(c) C'est ce qu'on vient de faire. Si la formule est vraie pour toute valeur de x , l'expression du polynôme est bien celle qu'on vient de calculer.

8. Avec l'expression précédente, x est racine de P_n si et seulement si $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{n+1} = 1$ (on a le droit de diviser par $x-i$, car $P_n(i) = (2i)^n \neq 0$ à l'aide de l'expression explicite de P_n). En posant $z = \frac{x+i}{x-i}$, on a donc $z = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$, avec $k \in \{0, \dots, n\}$. Or, $z = \frac{x+i}{x-i}$ est équivalent à $zx - iz = x+i$, soit $x = \frac{iz+i}{z-1}$ (attention, expression valable seulement si $z \neq 1$, ce qui

supprime la valeur $k=0$ des possibilités), donc $x = \frac{i(e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} + 1)}{e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} - 1} = \frac{ie^{i\frac{k\pi}{n+1}}(e^{i\frac{k\pi}{n+1}} + e^{-i\frac{k\pi}{n+1}})}{e^{i\frac{k\pi}{n+1}}(e^{i\frac{k\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{k\pi}{n+1}})} =$

$\frac{\cos(\frac{k\pi}{n+1})}{\sin(\frac{k\pi}{n+1})} = \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})}$, avec donc $k \in \{1, \dots, n\}$. Attention tout de même, il y a un piège

idiot : si n est pair, l'une des tangentes est nulle lorsque $k = \frac{n+1}{2}$, mais dans ce cas la racine vaut simplement 0 (le cosinus au numérateur étant nul).

Exercice 3

1. On commence par écrire $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \right) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)$ (il est indispensable de partir d'un DL du sinus à l'ordre 5 en anticipant la division par x). Cette expression est de la forme $1+u$, en posant $u = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)$, quantité qui a une limite nulle quand x tend vers 0. Comme de plus $u \sim -\frac{1}{6}x^2$, on aura $u^2 \sim \frac{1}{36}x^4$, donc $o(u^2) = o(x^4)$, ce qui permet de n'effectuer le développement de $\ln(1+u)$ qu'à l'ordre 2 : $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{72}x^4 + o(x^4)$, donc $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3-5}{360}x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$.

On applique plus ou moins la même méthode pour le deuxième DL demandé : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^6)$, on peut donc poser $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^6)$. La variable

u tend vers 0 et est équivalente en 0 à $-\frac{1}{2}x^2$, ce qui permet de ne faire le DL du $\ln$ « que » à l'ordre 3 : $\ln(\cos(x)) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^6}{48} - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1-3}{24}x^4 + \frac{-1+15-30}{720}x^6 + o(x^6) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$ (on a gardé le carré du premier terme et le double produit des deux premiers termes dans le développement de u^2 , et uniquement le cube du premier terme dans celui de u^3).

2. (a) L'expression $x^2 + f(x)^2$ est le carré de la distance entre l'origine du repère et le point de coordonnées $(x, f(x))$. On cherche donc à minimiser la distance entre l'origine et la courbe, ou plutôt son carré.
- (b) L'ensemble de tous les carrés de distances est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ (une distance ne peut pas être négative, son carré encore moins!), et certainement non vide puisqu'il y a des points sur la courbe, il admet donc bien une borne inférieure. Par caractérisation de la borne inférieure, on peut trouver, pour tout entier n , un réel x_n tel que $\Delta(f) \leq x_n^2 + f(x_n)^2 \leq \Delta(f) + \frac{1}{n}$, ce qui implique la limite demandée.
- (c) La suite (x_n) construite dans la question précédente vérifie $\Delta(f) \leq x_n^2 + f(x_n)^2 \leq \Delta(f) + 1$. En particulier, elle est majorée, et x_n^2 est donc majorée par la même valeur (puisque $f(x_n)^2$ est toujours positif). La suite (x_n) est donc bornée, on peut lui appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente. En notant a la limite de cette sous-suite, puisque la fonction f a été supposée continue, on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)}^2 + f(x_{\varphi(n)})^2 = a^2 + f(a)^2$. Or, par hypothèse, cette même limite est égale à $\Delta(f)$, ce qui suffit à conclure.
- (d) Si on note g la fonction définie par $g(x) = x^2 + f(x)^2$, la fonction g est dérivable (on a supposé f de classe $\mathcal{C}^1$) et admet par définition de a un minimum en a . On a donc $g'(a) = 0$. Or, $g'(x) = 2x + 2f(x)f'(x)$, ce qui prouve que $a + f(a)f'(a) = 0$, et donc $f(a)f'(a) = -a$.
3. La fonction f_0 étant constante égale à 1, on cherche dans ce cas à minimiser $x^2 + 1$, ce qui sera fait pour $x = 0$ et $\delta_0 = 1$.
4. Posons cette fois-ci $g(x) = x^2 + \cos^2(x)$. La fonction g étant paire, on peut ne rechercher son minimum que sur $\mathbb{R}^+$. Elle est dérivable sur $[0, +\infty[$, et $g'(x) = 2x - 2\cos(x)\sin(x)$. Dérivons une deuxième fois : $g''(x) = 2 + 2\sin^2(x) - 2\cos^2(x) = 2(1 - \cos(2x)) \geq 0$. La fonction g' est donc croissante sur $[0, +\infty[$, et comme $g'(0) = 0$, elle est positive. Finalement, g est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et son minimum est donc à nouveau atteint pour $x = 0$, avec $\delta_1 = \delta_0 = 1$.
5. Comme dans le cas précédent, les fonctions $g_n : x \mapsto x^2 + \cos^{2n}(x)$ seront toujours paires, on peut donc chercher un minimum atteint sur $\mathbb{R}^+$. Mais on peut aussi constater que $g_n(0) = 1$, et que le minimum recherché est donc nécessairement un réel de l'intervalle $[0, 1]$. Comme on a $g_n(x) \geq x^2$, l'abscisse du minimum vérifie donc nécessairement $a^2 \leq 1$, soit $|a| \leq 1$. Quitte à supposer $a \geq 0$, on a donc $a \in [0, 1]$, ce qui est encore mieux que ce qui était demandé dans l'énoncé.
6. Puisque a_n est par hypothèse l'abscisse du minimum de g_n , on a $\forall x \in [0, 1]$, $g(a_n) = a_n^2 + \cos^{2n}(a_n) \leq g_n(x) \leq x^2 + \cos^{2n}(x)$, donc a fortiori $a_n^2 \leq x^2 + \cos^{2n}(x)$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on peut choisir $x \neq 0$ tel que $x^2 \leq \varepsilon$ (puisque'on peut faire tendre x vers 0), puis choisir n de façon à avoir, pour ce x désormais fixé, $\cos^{2n}(x) \leq \varepsilon$, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{2n}(x) = 0$. On aura donc, à partir d'un certain rang, $0 \leq a_n^2 \leq 2\varepsilon$, et ce pour tout réel $\varepsilon > 0$. Cela prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 = 0$, et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
7. On sait que a_n doit vérifier l'équation $-a_n = f_n(a_n)f'_n(a_n) = \cos^n(a_n) \times (-n \cos^{n-1}(a_n) \sin(a_n))$, donc $a_n = n \sin(a_n) \cos^{2n-1}(a_n)$. Les valeurs de a_n deviennent nécessairement non nulles à partir d'un certain rang (sinon le minimum correspondant serait égal à $\cos^{2n}(0) = 1$, et on

vient de prouver qu'il tend vers 0 avec les calculs de la question précédente). On peut donc diviser par $na_n : \frac{1}{n} = \frac{\sin(a_n)}{a_n} \cos^{2n-1}(a_n)$, puis tout passer au $\ln$ (tout est strictement positif) pour en déduire l'égalité souhaitée, en se rappelant bien sûr que $\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n)$.

Comme a_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, les DL calculés à la toute première question de l'exercice permettent alors d'affirmer que $\ln\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right) \sim -\frac{a_n^2}{6}$, et $\ln(\cos(a_n)) \sim -\frac{a_n^2}{2}$, donc en reportant dans l'équation précédente, $\ln(n) = \frac{1}{6}a_n^2 + o(a_n^2) + \frac{(2n-1)}{2}(a_n^2 + o(a_n^2)) = na_n^2 + o(na_n^2)$. Autrement dit, $na_n^2 \sim \ln(n)$, donc $a_n^2 \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

8. Assez trivialement, $\frac{\ln(n)}{n} = o\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)$ (on revient simplement à la définition de la négligeabilité, le quotient des deux suites donne $\frac{1}{\ln(n)}$ qui a bien une limite nulle). Le résultat et les calculs de la question précédente montrent alors que $\ln\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right) \sim -\frac{a_n^2}{6} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$, et $\ln(\cos(a_n)) \sim -\frac{a_n^2}{2} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Repartons alors de la relation de la question 7 : $\ln(n) = -\ln\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right) - 2n \ln(\cos(a_n)) + \ln(\cos(a_n)) = -2n \ln(\cos(a_n)) + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)$. Or, $-2n \ln(\cos(a_n)) = -2n\left(-\frac{1}{2}a_n^2 - \frac{1}{12}a_n^4 + o(a_n^4)\right) = na_n^2 + \frac{n}{6}a_n^4 + o(na_n^4)$. On sait que $a_n^2 \sim \frac{\ln(n)}{n}$, donc $na_n^4 \sim \frac{\ln^2(n)}{n}$, ce qui permet finalement d'écrire que $\ln(n) = na_n^2 + \frac{\ln^2(n)}{6n} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)$, et donc que $a_n^2 = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$. Ouf.

9. Par définition, $\delta_n = a_n^2 + \cos^{2n}(a_n)$. Reste à calculer un développement de $\cos^{2n}(a_n) = e^{2n \ln(\cos(a_n))}$ (on est obligés de passer par la forme exponentielle pour ne pas écrire n'importe quoi ici puisque la puissance du cosinus est variable). Allons-y pour un peu de calcul bourrin :

$$\begin{aligned} \ln(\cos(a_n)) &= -\frac{1}{2}a_n^2 - \frac{1}{12}a_n^4 + o(a_n^4) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^2 + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

(le reste a le bon goût de se simplifier).

On a donc $2n \ln(\cos(a_n)) = -\ln(n) + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)$, puis $\cos^{2n}(a_n) = e^{2n \ln(\cos(a_n))} = e^{-\ln(n) + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)} = \frac{1}{n} e^{o\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)}$. Comme ce qui reste dans l'exponentielle a une limite nulle (croissance comparée), on peut en écrire un bête DL à l'ordre 0 : $\cos^{2n}(a_n) = \frac{1}{n} \left(1 + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.

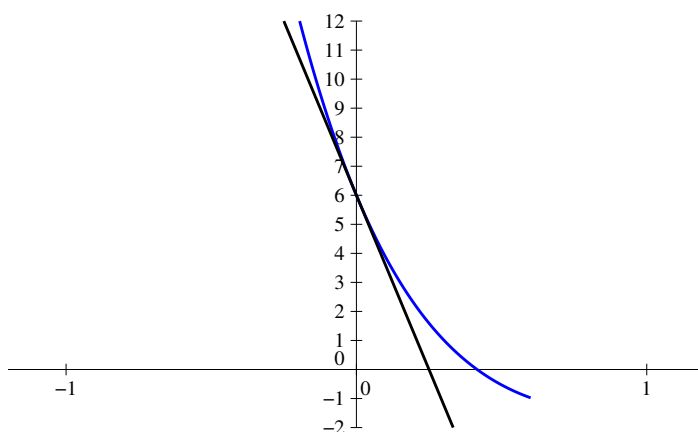
Tout s'emboîte parfaitement pour conclure : $\delta_n = a_n^2 + \cos^{2n}(a_n) = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln^2(n)}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.

Exercice 4 (d'après Capes 2011)

A. Étude des fonctions h_n et des polynômes L_n .

1. On calcule $h_0(x) = e^{-x}$, puis $L_0(x) = e^x h_0(x) = 1$. Ensuite, $h_1(x) = x e^{-x}$, donc $h_1'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x)e^{-x}$, donc $L_1(x) = 1 - x$ (on confondra, comme dans l'énoncé, les polynômes et leurs expressions fonctionnelles dans les premières questions de cet exercice). Enfin, $h_2(x) = x^2 e^{-x}$, donc $h_2'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, puis $h_2''(x) = (2 - 2x - 2x + x^2)e^{-x} = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$. On en déduit enfin $L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$. On constate que les fonctions obtenues sont bien des fonctions polynômiales, ce qui n'avait rien d'évident avec la définition donnée.
2. On part de $h_3(x) = x^3 e^{-x}$, et on dérive trois fois : $h_3'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x}$, puis $h_3''(x) = (6x - 3x^2 - 3x^2 + x^3)e^{-x} = (6x - 6x^2 + x^3)e^{-x}$, et enfin la dérivée demandée $h^{(3)} - 3(x) = (6 - 12x + 3x^2 - 6x + 6x^2 - x^3)e^{-x} = (6 - 18x + 9x^2 - x^3)e^{-x} = g(x)$.
3. On sait tous par coeur que $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ (si on veut être hyper rigoureux, on a le droit de remplacer la variable x par $-x$ dans le DL classique de l'exponentielle car $-x$ tend bien vers 0 quand x tend vers 0), il suffit donc de faire un produit par un vrai polynôme pour obtenir le DL demandé : $g(x) = (6 - 18x + 9x^2 - x^3) \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + o(x^3) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3 - 6x + 18x^2 - 9x^3 + 3x^2 - 9x^3 - x^3 + o(x^3) = 6 - 24x + 30x^2 - 20x^3 + o(x^3)$. On interprète comme d'habitude ce développement limité en trois temps :
 - $g(0) = 6$, ce qui n'est pas une grande découverte (il ne s'agit pas ici d'une limite ou d'un équivalent, la fonction étant bien sûr définie sur $\mathbb{R}$ tout entier).
 - g admet un DL à l'ordre 1 de la forme $g(x) = 6 - 24x + o(x)$, la fonction est donc dérivable en 0 et sa courbe y admet pour tangente la droite d'équation $y = -18x + 6$ (en particulier, $g'(0) = -24$).
 - enfin, $g(x) - (6 - 24x) \sim 9x^2 \geq 0$, ce qui prouve que la courbe de g est située au-dessus de cette tangente au voisinage de 0.

Puisqu'on nous le demande, proposons une allure de courbe au voisinage de 0 (la seule difficulté est de trouver une échelle adaptée) :



4. Les calculs effectués dans les premières questions laissent imaginer que, $\forall k \leq n$, les dérivées $h_n^{(k)}$ seront toujours de la forme $P_k(x)e^{-x}$, avec P_k un polynôme qui reste toujours de degré n , mais dont le coefficient dominant change de signe à chaque calcul. De fait, ça se prouve presque trivialement par récurrence : c'est évidemment le cas pour $k = 0$ (avec $P_0 = x^n$, donc de coefficient dominant égal à 1), et si $h_n^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x}$, alors $h_n^{(k+1)}(x) = (P_k'(x) - P_k(x))e^{-x}$, avec $P_{k+1} = P_k' - P_k$ qui a le même degré que P_k (on lui ajoute un polynôme de degré

strictement inférieur) mais un coefficient dominant opposé. On en déduit donc que $h_n^{(n)} = P_n(x)e^{-x}$, avec P_n de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$ puisqu'il y a eu n changements de signe. On conclut alors facilement : $L_n(x) = \frac{1}{n!}P_n(x)$ est bien un polynôme, de degré n et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$. Notons pour les plus bourrins d'entre vous qu'on pouvait aussi appliquer salement la formule de Leibniz pour obtenir une expression explicite de L_n , ce qui sera d'ailleurs demandé un peu plus loin dans l'énoncé.

5. (a) Par définition, $h_n^{(n)}(x) = n!e^{-x}L_n(x)$, donc en dérivant $h_n^{(n+1)}(x) = n!e^{-x}(L'_n(x) - L_n(x))$.
 - (b) La question la plus difficile de tout le DS : $h_{n+1}(x) = xh_n(x)$.
 - (c) En appliquant la formule de Leibniz pour dériver $n+1$ fois la relation de la question précédente, on obtient $h_{n+1}^{(n+1)}(x) = xh_n^{(n+1)}(x) + (n+1)h_n^{(n)}(x)$ (les seules dérivées non nulles du facteur x dans le produit sont la « zéroième » et la première, il ne reste donc que deux termes dans la somme de la formule de Leibniz). En exploitant les questions précédentes, on peut alors écrire $L_{n+1}(x) = \frac{e^x}{(n+1)!}h_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{e^x}{(n+1)!}(xh_n^{(n+1)}(x) + (n+1)h_n^{(n)}(x)) = \frac{e^x}{(n+1)!}(xn!e^{-x}(L'_n(x) - L_n(x)) + (n+1)n!e^{-x}L_n(x)) = \frac{x}{n+1}(L'_n(x) - L_n(x)) + L_n(x) = \frac{x}{n+1}L'_n(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n(x)$, soit exactement la relation demandée.
 - (d) En calculant à partir de la formulation de droite, $(h_{n+1}^{(n+1)})'(x) = ((n+1)!e^{-x}L_{n+1}(x))'(x) = (n+1)!(L'_{n+1}(x) - L_{n+1}(x))e^{-x}$. Calculons maintenant à partir de la formulation de gauche (en reprenant certains calculs déjà effectués plus haut) : puisque $h_{n+1}(x) = x^{n+1}e^{-x}$, $h'_{n+1}(x) = (n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1}e^{-x} = (n+1)h_n(x) - h_{n+1}(x)$, donc $(h'_{n+1})^{(n+1)}(x) = ((n+1)h_n - h_{n+1})^{(n+1)}(x) = (n+1) \times n!(L'_n(x) - L_n(x))e^{-x} - (n+1)!L_{n+1}(x)e^{-x}$. Une identification des deux formules obtenues donne donc $L'_{n+1} - L_{n+1} = L'_n - L_n - L_{n+1}$, d'où $L'_{n+1} = L'_n - L_n$.
6. Si on dérive le résultat obtenu à la question 5.c, on obtient $L'_{n+1} = \frac{1}{n+1}L'_n + \frac{X}{n+1}L''_n - \frac{1}{n+1}L_n + \left(1 - \frac{X}{n+1}\right)L'_n$. La dernière formule obtenue nous donne alors $L'_n - L_n = \frac{1}{n+1}L'_n + \frac{X}{n+1}L''_n - \frac{1}{n+1}L_n + \left(1 - \frac{X}{n+1}\right)L'_n$, donc en multipliant tout par $n+1$: $(X-1)L'_n - nL_n - XL''_n = 0$. C'est exactement l'équation demandée.

B. Application à un calcul de somme de coefficients binomiaux.

1. Commençons par rappeler que la dérivée k -ème de la fonction $x \mapsto x^n$ est donnée par l'expression $\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$. On peut donc appliquer la formule de Leibniz pour dériver n fois le produit $x^n e^{-x}$ (pour simplifier l'expression, on va dériver k fois l'exponentielle et $n-k$ fois la puissance dans le calcul) et obtenir $h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k (-1)^k e^{-x}$, donc $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k$. On confirme au passage qu'il s'agit d'un polynôme de degré n , et de coefficient dominant égal à $\frac{(-1)^n}{n!}$.
2. On écrit le développement limité à l'ordre p de e^{-x} avant de faire le produit : $e^{-x} = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{k!} x^k + o(x^p)$, donc $h_n(x) = x^n e^{-x} = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{k!} x^{k+n} + o(x^{n+p})$.

En dérivant n fois le DL (on a le droit, toutes les fonctions manipulées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et admettent des DL à tout ordre), on trouve simplement $h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(n+k)!}{k!} + o(x^p)$.

3. Il faut effectuer le produit par e^x (et la division par $n!$) pour enfin avoir le DL de L_n . Attention, c'est un peu laid à écrire (mais pas si compliqué en fait) :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^p \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(n+k)!}{k!} x^k \right) + o(x^p) = \left(\sum_{k=0}^p \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+k}{k} x^k \right) +$$

$o(x^p) = \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{p-k} \frac{(-1)^i}{j!i!} \binom{n+i}{i} x^{j+i} + o(x^p)$. Dans ce DL, les termes donnant une puissance égale à k sont ceux pour lesquels $j+i=k$, donc $j=k-i$. Ces termes sont de la forme $\frac{(-1)^i}{(k-i)!i!} \binom{n+i}{i} x^k = \frac{1}{k!} \times (-1)^i \binom{n+i}{i} \binom{k}{i} x^k$, avec i variant entre 0 et k . C'est exactement la formule demandée par l'énoncé.

4. Puisque L_n est en fait une fonction polynômiale, on connaît déjà le développement limité à l'ordre n de la fonction : $L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k + o(x^n)$ (ici, le $o(x^n)$ est en fait nul).

L'unicité de la partie régulière d'un développement limité permet alors simplement d'affirmer que $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n+i}{i} \binom{k}{i} = (-1)^k \binom{n}{k}$ lorsque $k \leq n$. Dans le cas contraire, la somme est simplement nulle.