Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 7

MPSI Lycée Camille Jullian

15 mars 2025

Exercice 1

Cette année, pour prouver qu'ils savent faire autre chose que de la version latine et de la dissertation, les élèves d'Hypokhâgne du Lycée Camille Jullian ont décidé de participer au tournoi de foot inter-prépas organisé tous les ans par la ville de Bordeaux. Ils ont même décidé de présenter deux équipes complètes, constituées chacune de 16 joueurs au total (11 titulaires et 5 remplaçants). La classe est constitué de 42 élèves au total, 24 filles et 18 garçons (données tout à fait inventées, d'ailleurs il y a **deux** classes d'Hypokhâgne au lycée, comme vous le savez tous).

1. De combien de façons peut-on former les deux équipes si on souhaite une équipe de filles et une équipe de garçons ?
2. De combien de façons peut-on former les deux équipes si on souhaite avoir autant de garçons que de filles dans chaque équipe ?
3. De combien de façons peut-on former les deux équipes si on n'impose rien de tout ça ?
4. L'équipe A est désormais constituée, elle comporte 10 filles et 6 garçons. Il faut désormais choisir les titulaires du premier match, ainsi que le poste auquel ils vont jouer (il y a 11 titulaires, donc 11 postes différents, tous distinguables. Parmi ces postes, on admet qu'il y a exactement un gardien, quatre défenseurs, quatre milieux de terrain et deux attaquants). De combien de façons différentes peut-on le faire si on impose l'une des conditions suivantes :
   (a) on n'impose rien du tout.
   (b) on impose que les dix filles soient titulaires.
   (c) on impose que le gardien et les quatre défenseurs soient tous des garçons.
   (d) exactement quatre garçons sont titulaires, un sera gardien, un défenseur, un milieu de terrain et un attaquant.
5. Le premier match est terminé (nos élèves se sont bien débrouillés, avec une honorable défaite $1-8$ contre une équipe de PCSI), il est temps de choisir les titulaires pour le deuxième match. De combien de façons peut-on le faire si on veut que tous les élèves remplaçants au premier match soient désormais titulaires ?
6. De combien de façons peut-on le faire si les élèves qui étaient attaquants lors du premier match sont mis au repos (donc remplaçants) pour le deuxième match ?

Exercice 2

On considère une suite de polynômes (P_n) définie de la façon suivante : $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = 2XP_n - \dfrac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'$.

1. Calculer explicitement les polynômes P_1, P_2 et P_3.
2. Monter que, pour tout entier n, le polynôme P_n est de degré **inférieur ou égal** à n.

3. En notant a_n le coefficient de degré n de P_n (éventuellement égal à 0), montrer que $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} a_n$.
4. En déduire que P_n est de degré exactement n, et donner la valeur de son coefficient dominant (en justifiant).
5. Déterminer la parité du polynôme P_n en fonction de n.
6. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P'_{n+1} = (n+2)P_n$.
   (b) Calculer $P_n(0)$ (on distinguera deux cas en fonction de la parité de n).
   (c) En déduire que $P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2)\displaystyle\int_0^x P_n(t)\ dt$.
7. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} - 2XP_{n+1} + (1+X^2)P_n = 0$.
   (b) On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on note $u_n = P_n(x)$. En exploitant la relation précédente, calculer u_n en fonction de n et de x (vos connaissances sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 devraient intervenir).
   (c) Montrer que $P_n = \dfrac{1}{2i}((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1})$.
8. Montrer que P_n est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, et préciser ses racines.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de calculer la distance minimale entre l'origine du repère et les courbes de certaines fonctions trigonométriques.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$, ainsi que le développement limité à l'ordre 6 en 0 de $x \mapsto \ln(\cos(x))$. Ces DL serviront dans la suite de l'exercice.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on note $\Delta(f) = \inf\{x^2 + f(x)^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Que représente, géométriquement, le nombre $\Delta(f)$?
   (b) Montrer que $\Delta(f)$ est bien défini, et qu'il existe une suite de réels (x_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2 + f(x_n)^2 = \Delta(f)$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel a pour lequel $a^2 + f(a)^2 = \Delta(f)$ (indication : Bolzano-Weierstrass). Autrement dit, la borne inférieure dans la définition de $\Delta(f)$ peut désormais être remplacée par un minimum.
   (d) Montrer que le réel a défini précédemment vérifie nécessairement $f(a)f'(a) = -a$.
3. On considère désormais les fonctions $f_n : x \mapsto \cos^n(x)$, et on note $\delta_n = \Delta(f_n)$. Que vaut δ_0 ?
4. Calculer la valeur de δ_1.
5. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, montrer que le minimum définissant δ_n est atteint en un réel $a_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
7. En exploitant le résultat de la question 2.*d*, montrer que $\ln(n) = -\ln\left(\dfrac{\sin(a_n)}{a_n}\right) - (2n-1)\ln(\cos(a_n))$. En déduire que $a_n^2 \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.
8. Montrer que $a_n^2 = \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{\ln^2(n)}{6n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$ (on pourra commencer par montrer que $\ln\left(\dfrac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ et $\ln(\cos(a_n))$ sont tous deux négligeables par rapport à $\dfrac{\ln^2(n)}{n}$).
9. En déduire un développement asymptotique de δ_n à l'ordre $o\left(\dfrac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.

Exercice 4 (d'après Capes 2011)

Pour tout entier naturel n, on pose $h_n(x) = x^n e^{-x}$, et $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x)$, où la notation $f^{(n)}$ désigne comme d'habitude la dérivée n-ème de la fonction f.

A. Étude des fonctions h_n et des polynômes L_n.

1. Calculer explicitement L_0, L_1 et L_2.
2. Calculer les dérivées de la fonction h_3 jusqu'à obtenir l'expression de $g(x) = h_3^{(3)}(x)$.
3. Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction g, et en déduire l'allure locale de la courbe représentative de la fonction g au voisinage de 0 (on précisera la tangente éventuelle, la position relative de la courbe et de la tangente, et on illustrera par un petit graphe).
4. Montrer que L_n est toujours une fonction polynômiale, dont on précisera le degré.
5. (a) Exprimer $h_n^{(n)}$ et $h_n^{(n+1)}$ en fonction de L_n et de L'_n.
   (b) Donner une relation simple entre h_n et h_{n+1}.
   (c) En déduire que $L_{n+1} = \dfrac{X}{n+1} L'_n + \left(1 - \dfrac{X}{n+1}\right) L_n$.
   (d) En remarquant que $(h'_{n+1})^{(n+1)} = (h_{n+1}^{(n+1)})'$, montrer que $L'_{n+1} = L'_n - L_n$.
6. Montrer que les polynômes L_n sont solutions des équations différentielles $XL''_n + (1-X)L'_n + nL_n = 0$.

B. Application à un calcul de somme de coefficients binomiaux.

1. À l'aide de la formule de Leibniz, calculer explicitement les coefficients des polynômes L_n.
2. Si p est un entier naturel, calculer le développement limité à l'ordre $n+p$ en 0 de h_n. En déduire le développement limité à l'ordre p en 0 de $h_n^{(n)}$.
3. Montrer que le DL_p de L_n en 0 est donné par $L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p)$,

   où $a_k = \displaystyle\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+i}{i} \binom{k}{i}$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+i}{i} \binom{k}{i}$ (on distinguera deux cas, selon que $k \leqslant n$ ou non).