Devoir Surveillé n^{o} 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

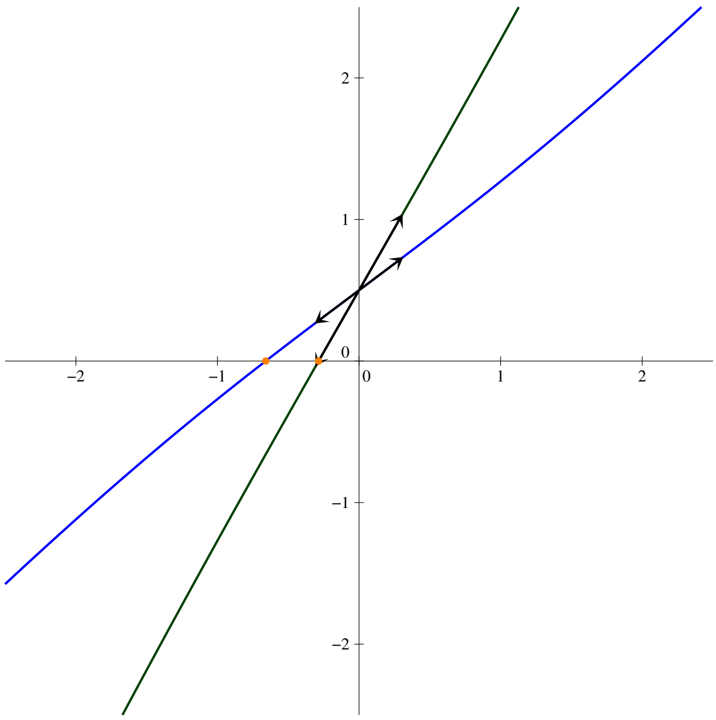
1er février 2025

Exercice 1

1. Les fonctions f_n sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur $1 + e^x$ ne pouvant pas s'annuler), et $f_n'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} + n$, puis $f_n''(x) = \dfrac{-e^x(1+e^x)^2 + e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \dfrac{-e^x(1+e^x) + 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^{2x} - e^x}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3}$.
2. On exploite bien sûr les calculs de la question précédente : f_n'' est du signe de $e^x - 1$, donc négative sur $]-\infty, 0]$ puis positive sur $[0, +\infty[$. La dérivée f_n' admet donc un minimum en 0, de valeur $f_n'(0) = n - \dfrac{1}{4} > 0$. La fonction f_n' est donc toujours strictement positive, et f_n strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. La fonction f_n étant continue et strictement croissante, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve l'existence et l'unicité de u_n. Puisqu'on nous a demandé de faire un tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

3. Cela découle du calcul de dérivée seconde effectué plus haut : f_n'' s'annule (et change de signe) quand $x = 0$. Comme $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f_n'(0) = n - \dfrac{1}{4}$, le point d'inflexion a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ et la tangente en ce point a pour équation $y = \left(n - \dfrac{1}{4}\right)x + \dfrac{1}{2}$.
4. C'est en fait très difficile de faire quelque chose de vraiment fidèle puisque les vraies courbes sont dangereusement proches d'être toutes droites (cf ma figure faite à l'ordi en-dessous). On essaie quand même d'indiquer les tangentes calculées à la question d'avant (mais le point d'inflexion en 0 est invisible), et les valeurs de u_1 et u_2 correspondent aux abscisses des points oranges (u_1 à gauche, u_2 à droite, la courbe de f_1 étant la courbe bleue et celle de f_2 la courbe verte) :



5. On sait déjà que $f_n(0) = \dfrac{1}{2} > 0$. On calcule $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1$. Or, $1 + e^{-\dfrac{1}{n}} > 1$ (une exponentielle est toujours positive), donc $\dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} < 1$ et $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) < 0$. On a donc $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) < f_n(u_n) < f_n(0)$. La croissance de la fonction f_n permet alors de conclure à l'encadrement demandé. Le théorème des gendarmes nous assure ensuite que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
6. Puisque $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x$, cette différence est positive sur $[0, +\infty[$ et négative sur $]-\infty, 0]$. Comme $u_n < 0$, on en déduit que $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n = u_n < 0$, donc $f_{n+1}(u_n) < 0$. En particulier, $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, et par croissance de la fonction f_{n+1}, $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.
7. Par définition, $f_n(u_n) = 0$, donc $nu_n = -\dfrac{1}{1+e^{u_n}}$. Or, on vient de voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = -\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{u_n}} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

1. (a) On calcule comme demandé $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 16 \\ -8 & 1 & -8 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. Les coefficients sur la diagonale ont été multipliés par -2 par rapport à ceux de A, et on déduit ensuite, en observant la diagonale, que $A^2 = -2A + 3I_3$.

   (b) On isole classique la matrice identité dans la relation précédente : $\dfrac{1}{3}A^2 + \dfrac{2}{3}A = I_3$, donc $A\left(\dfrac{1}{3}A + \dfrac{2}{3}I_3\right) = I_3$, ce qui prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A + 2I_3) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

(c) On procède bien sûr par récurrence. La propriété est vraie au rang 0 en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, et au rang 1 en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Si on la suppose vérifiée au rang n, alors $A^{n+1} = A \times A^n = A \times (a_n A + b_n I_3) = a_n A^2 + b_n A = a_n(-2A + 3I_3) + b_n A = (b_n - 2a_n)A + 3a_n I_3$. En posant $a_{n+1} = b_n - 2a_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$, la propriété reste donc vraie au rang $n+1$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence.

(d) À l'aide des relations obtenues à la question précédente, on peut calculer $a_{n+2} = b_{n+1} - 2a_{n+1} = -2a_{n+1} + 3a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, son équation caractéristique $x^2 + 2x - 3 = 0$ ayant pour racines $r_1 = 1$ (racine évidente) et $r_2 = -3$ (le produit des racines devant être égal à -3). Il existe donc deux constantes α et β telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha + \beta \times (-3)^n$. Les conditions initiales rappelées à la question précédente imposent $a_0 = 0 = \alpha + \beta$ et $a_1 = 1 = \alpha - 3\beta$, ce qui impose $\beta = -\frac{1}{4}$ (en soustrayant les deux équations) et $\alpha = \frac{1}{4}$, donc $a_n = \frac{1-(-3)^n}{4}$. On en déduit directement $b_n = 3a_{n-1} = \frac{3+(-3)^n}{4}$, et donc $A^n = \frac{1-(-3)^n}{4}A + \frac{3+(-3)^n}{4}I_3$. Si on a peur de s'être trompé, on vérifie rapidement que ça donne bien $A^2 = -2A + 3I_3$, mais aussi $A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I_3$.

2. (a) Calculons donc $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, puis $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ah, il semblerait bien que $J^2 = J$ (on peut d'ailleurs retrouver ce résultat par un calcul purement formel en reprenant les premiers calculs de la question 1 : $J^2 = \frac{1}{16}(A + 3I_3)^2 = \frac{1}{16}(A^2 + 6A + 9I_3) = \frac{1}{16}(-2A + 3I_3 + 6A + 9I_3) = \frac{1}{16}(4A + 12I_3) = \frac{1}{4}(A + 3I_3) = J$). Une récurrence complètement triviale prouve alors que $J^n = J$ pour tout entier $n \geqslant 1$ (ce n'est bien sûr pas vrai pour $n = 0$).

(b) Puisque $J = \frac{1}{4}(A + 3I_3)$, on a $A = 4J - 3I_3$. Les matrices $4J$ et $3I_3$ commutent, on peut donc appliquer le binôme de Newton puis la formule obtenue pour J^n, en faisant bien attention à isoler le terme d'indice 0 : $A^n = (4J - 3I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k}\right) J = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} - (-3)^n\right) J = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n)J$. On retrouve bien $A = -3I_3 + 4J$ pour $n = 1$.

(c) On teste : $(-3)^{-1} I_3 + (1 - (-3)^{-1})J = \frac{4}{3}J - \frac{1}{3}I_3 = \frac{1}{3}(A + 3I_3) - \frac{1}{3}I_3 = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I_3$, ce qui bien la formule obtenue plus haut pour l'inverse A^{-1}. La formule est donc toujours valable (elle l'est en fait pour tout entier **relatif** n).

3. (a) Comme toujours pour ce genre de question, je vais passer par la résolution du système $\begin{cases} -2x + z = a \\ x + y = b \\ x - z = c \end{cases}$. La somme des équations extrêmes donne $-x = a + c$, donc $x = -a - c$, en remplaçant dans les deux dernières équations on en déduit facilement $y = b - x = a + b + c$ et $z = x - c = -a - 2c$. La matrice P est donc inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) On calcule $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ouf, la matrice D

obtenue est bien diagonale.

(c) On sait que $D = P^{-1}AP$, donc $A = PDP^{-1}$ (en multipliant l'égalité par P à gauche et par P^{-1} à droite. On prouve alors par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$. C'est vrai au rang 0 : $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$, et en supposant la formule vérifiée au rang n, alors $A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouvé l'hérédité.

4. (a) Puisque $N = P^{-1}MP$, l'égalité $DN = ND$ est équivalente à $DP^{-1}MP = P^{-1}MPD$, ou encore $P^{-1}APP^{-1}MP = P^{-1}MPP^{-1}AP$. Après simplification des PP^{-1} centraux et produit par P à gauche et P^{-1} à droite, on obtient bien l'équivalence avec $AM = MA$.

(b) Oui, on va bourriner. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et on calcule $ND = \begin{pmatrix} -3a & b & c \\ -3d & e & f \\ -3g & h & i \end{pmatrix}$ et $DN = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Les neuf équations imposant l'égalité des deux matrices se répartissent en deux catégories : cinq équations triviales qui sont toujours vérifiées (la première, et les deux dernières dex deux dernières lignes), et quatre qui imposent la nullité d'un coefficient : $-3b = b$ donc $b = 0$, $-3c = c$ donc $c = 0$, $-3d = d$ donc $d = 0$ et $-3g = g$ donc $g = 0$. Les matrices commutant avec D sont donc de la forme $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$, où a, e, f, h et i sont cinq réels quelconques.

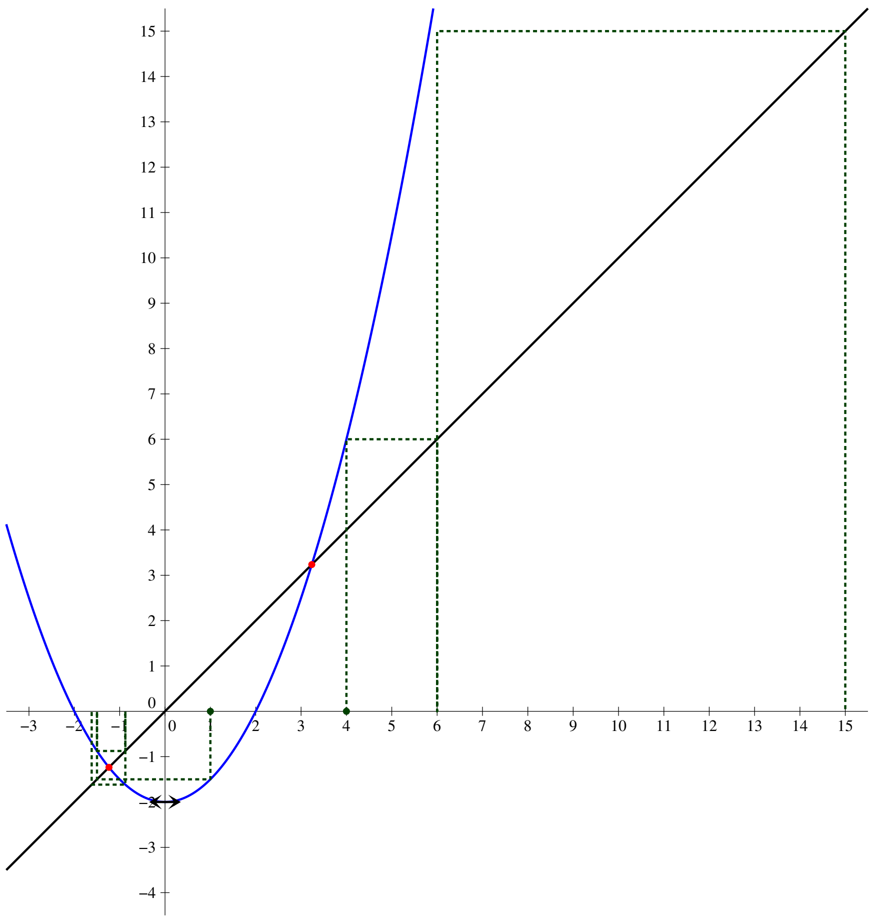
(c) D'après la question a, on aura $M = PNP^{-1}$, où N est une matrice de la forme précédente. En écrivant $N = aE_{1,1} + eE_{2,2} + fE_{2,3} + hE_{3,2} + iE_{3,3}$ (pour une fois, j'ai utilisé la notation des matrices élémentaires rapidement évoquées en cours pour des matrices contenant un seul coefficient égal à 1, et tous les autres nuls), on obtient facilement $M = aPE_{1,1}P^{-1} + ePE_{2,2}P^{-1} + fPE_{2,3}P^{-1} + hPE_{3,2}P^{-1} + iPE_{3,3}P^{-1}$. La matrice M est donc combinaison linéaire des cinq matrices suivantes : $PE_{1,1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $PE_{2,2}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $PE_{2,3}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $PE_{3,2}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $PE_{3,3}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. La fonction f étant continue, les limites possibles pour (u_n) sont les points fixes de f. On résout donc l'équation $x = \frac{1}{2}(x^2 - 4)$, soit $x^2 - 2x - 4 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$ et a donc deux racines réelles : $x_1 = \frac{2 - \sqrt{20}}{2} = 1 - \sqrt{5}$, et $x_2 = \frac{2 + \sqrt{20}}{2} = 1 + \sqrt{5}$.

2. Le signe de $f(x) - x$ découle des calculs effectués dans la première question : le trinôme $x^2 - 2x - 4$ est négatif entre ses racines, donc $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$, et positif le reste du temps. De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ puis croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec pour minimum $f(0) = -2$. De façon évidente, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. On peut résumer toutes ces informations dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		0		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$1-\sqrt{5}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$1+\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	



3. Pas grand chose à dire sur la courbe elle-même, qui est une parabole très classique. Si on part de $a = 4$, on voit que les termes de la suite vont très rapidement s'enfuir du côté de $+\infty$. C'est beaucoup moins clair en partant de 1 (et ça risque en fait de dépendre pas mal de l'allure tracée pour la courbe au voisinage de son point fixe $1-\sqrt{5}$, mais ça ne devrait en fait **pas** se rapprocher du point fixe en « escargot », mais bel et bien s'éloigner de ce point fixe (en faisant tout de même une sorte de spirale), avec des termes qui s'approchent de 0 et de -2 selon la parité de l'indice. Avec l'échelle prise, je ne peux de toute façon pas indiquer assez de termes pour que ce soit vraiment visible.
4. (a) L'intervalle $]1+\sqrt{5}, +\infty[$ est un intervalle stable par f (en effet, f étant croissante sur cet intervalle, $\forall x > 1+\sqrt{5}$, $f(x) > f(1+\sqrt{5}) = 1+\sqrt{5}$). Une récurrence triviale montre alors que $u_0 > 1+\sqrt{5} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1+\sqrt{5}$.

   (b) On sait que $f(x) - x > 0$ sur l'intervalle $]1+\sqrt{5}, +\infty[$. D'après la question précédente, $u_n > 1+\sqrt{5}$, donc $f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement croissante. Si elle était majorée, elle convergerait donc vers une limite $l \geqslant a > 1+\sqrt{5}$, ce qui est impossible d'après le calcul de la question 1. La suite n'est donc pas majorée, elle diverge alors vers $+\infty$.

5. (a) C'est une application directe de l'inégalité des accroissements finis. Sur l'intervalle $[2,4]$, $|f'(x)| = |x| \geqslant 2$, $x \in [2,4]$ par hypothèse, et $1+\sqrt{5} \in [2,4]$ car $\sqrt{5} \in [2,3]$, donc on a bien $|f(x) - f(1+\sqrt{5})| \leqslant |x - (1+\sqrt{5})|$, ce qui donne l'inégalité demandée.

   (b) Il faut faire un raisonnement par l'absurde soigneux. Supposons donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1+\sqrt{5}$, avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1+\sqrt{5}$. En appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ (valeur arbitraire qu'on peut remplacer par une autre tant que le raisonnement ultérieur fonctionne), $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - (1+\sqrt{5})| \leqslant \dfrac{1}{2}$. En particulier, à partir du rang n_0, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[2,4]$ puisque $1+\sqrt{5} - \dfrac{1}{2} > \sqrt{5} > 2$ et $1+\sqrt{5}+\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2} = 4$. On a donc, d'après la question précédente, $\forall n \geqslant n_0$, $|f(u_n) - (1+\sqrt{5})| \geqslant 2|u_n - (1+\sqrt{5})|$, soit $|u_{n+1} - (1+\sqrt{5})| \geqslant 2|u_n - (1+\sqrt{5})| > |u_n - (1+\sqrt{5}|$. La suite $(|u_n - 1 - \sqrt{5}|)$ est donc strictement croissante à partir du rang n_0 et minorée à partir de ce même rang par $|u_{n_0} - (1+\sqrt{5})| > 0$. C'est contradictoire avec l'hypothèse $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1+\sqrt{5}$, ce qui prouve que la suite ne peut pas converger vers $1+\sqrt{5}$.

   (c) D'après la question précédente, un des termes de la suite doit être égal à $1+\sqrt{5}$. Notons n_0 le plus petit entier pour lequel $u_n = 1+\sqrt{5}$. Si $n_0 = 0$, la suite est constante égale à $1+\sqrt{5}$. Si $n_0 = 1$, on a donc $a \neq 1+\sqrt{5}$ mais $f(a) = 1+\sqrt{5}$. Or, $1+\sqrt{5}$ n'a que deux antécédents par f (les variations de la fonction montrent qu'il ne peut pas y en avoir plus) : $1+\sqrt{5}$ lui-même (puisque c'est un point fixe) et $-1-\sqrt{5}$ (car la fonction est paire). Dans ce cas, on a donc $a = -1-\sqrt{5}$, et la suite est constante égale à $1+\sqrt{5}$ à partir du rang 1. Si $n_0 = 2$, alors $u_2 = 1+\sqrt{5}$ et, par le même raisonnement que précédemment, $u_1 = -1-\sqrt{5}$. Dans ce cas, u_0 est un antécédent de $-1-\sqrt{5}$, ce qui est très problématique puisque $-1-\sqrt{5}$ n'a aucun antécédent par f (cette valeur est strictement inférieure à -2 qui est le minimum de f). On démontre de façon similaire que $n_0 > 2$ est impossible (on devrait avoir $u_{n_0-1} = -1-\sqrt{5}$, et aucune valeur de u_{n_0-2} ne peut convenir). Les deux seules valeurs de a pour lequelles $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1+\sqrt{5}$ sont donc $a = 1+\sqrt{5}$ et $a = -1-\sqrt{5}$.

6. (a) Supposons donc que ce ne soit pas que le cas, et que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]0, 1+\sqrt{5}[$. Sur cet intervalle, $f(x) - x < 0$, donc on aurait $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$. La suite serait donc décroissante et minorée par 0, donc convergente. Sa limite l vérifierait alors $0 \leqslant l \leqslant a < 1+\sqrt{5}$, ce qui est incompatible avec les valeurs calculées en début d'exercice pour les limites potentielles de la suite. Il existe donc (au moins) un terme de la suite n'appartenant pas à l'intervalle (et même, par le même raisonnement, une infinité, sinon la suite serait décroissante à partir d'un certain rang sans pouvoir converger).

   (b) Notons n_1 le plus petit entier pour lequel $u_{n_1} \notin]0, 1+\sqrt{5}[$. Bien sûr, $n_1 \geqslant 1$ (puisque $u_0 = a$ appartient à l'intervalle par hypothèse), et donc $u_{n_1-1} \in]0, 1+\sqrt{5}[$. Or, l'étude des variations de f permet d'affirmer que $f(]0, 1+\sqrt{5}[) =]-2, 1+\sqrt{5}[$, donc $u_{n_1} = f(u_{n_1-1}) \in]-2, 1+\sqrt{5}[$. Mais comme $u_{n_1} \notin]0, 1+\sqrt{5}[$, on en déduit que $u_{n_1} \in]-2, 0]$.

7. (a) Puisque $f(-2) = \dfrac{4-4}{2} = 0$ et $f(0) = -2$, la suite sera dans ce cas périodique de période 2. On le prouve par récurrence triviale si on le souhaite (tant qu'à faire on prend une double hypothèse de récurrence du type « $u_{2n} = 0$ **et** $u_{2n+1} = -2$ » pour rédiger plus vite).

   (b) Oui, bien sûr, il suffit de prendre des valeurs de a pour lesquelles on finira par avoir $u_{n_0} = 0$ à un moment (on ne peut pas tomber sur une valeur égale à -2 sans passer par 0 à l'étape d'avant). C'est le cas notamment pour $a = 2$ puisque $f(2) = 0$, mais aussi pour $a = \pm 2\sqrt{2}$, puisque dans ce cas $u_1 = \dfrac{8-4}{2} = 2$, puis $u_2 = 0$ et ensuite on boucle.

(c) La fonction f étant croissante sur $]-2,0[$, on a $f(]-2,0[)=]-2,0[$, donc l'intervalle est stable par f. Si $u_0 \in]-2,0[$, une récurrence triviale montre que c'est le cas de tous les termes de la suite.

(d) Calculons déjà $f \circ f(x) - x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(x^2-4)^2 - 4\right) - x = \frac{x^4 - 8x^2 - 8x}{8}$. Assez curieusement, aucun calcul n'est vraiment nécessaire pour factoriser. On sait déjà que les deux points fixes de f vont vérifier $f \circ f(x) = x$, donc sont racines du polynôme obtenu. Mais on sait aussi que c'est le cas de 0 et de -2 (puisque $f(f(-2)) = f(0) - 2$ et $f(f(0)) = f(-2) = 0$). On doit donc avoir $f \circ f(x) - x = \frac{x(x+2)(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})}{8}$ (ce qu'on vérifie facilement si on y tient). Le tableau de signe suivant s'en déduit :

x	$-\infty$		-2		$1-\sqrt{5}$		0		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f(f(x)) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

(e) Supposons par exemple que $a \geqslant 1-\sqrt{5}$, donc $u_0 \in [1-\sqrt{5}, 0]$, et commençons par prouver par récurrence la propriété P_n suivante : $u_{2n} \in [1-\sqrt{5}, 0]$ **et** $u_{2n+1} \in [-2, 1-\sqrt{5}]$. Pour le rang 0, on a déjà fait l'hypothèse que $u_0 \in [1-\sqrt{5}, 0]$, et la décroissance de f sur l'intervalle $[-2,0]$ implique alors $u_1 \in [f(0), f(1-\sqrt{5})]$, donc $u_1 \in [-2, 1-\sqrt{5}]$, ce qui prouve P_0. Si on suppose P_n vérifiée, l'hérédité se prouve toujours en appliquant la décroissance de f : $u_{2n+1} \in [-2, 1-\sqrt{5}]$, donc $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) \in [1-\sqrt{5}, 0]$, puis $u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \in [-2, 1-\sqrt{5}]$, ce qui prouve la propriété P_{2n+3}.
Tous les termes d'indice pair de la suite appartiennent donc à l'intervalle $[1-\sqrt{5}, 0]$, sur lequel on a vu dans la question précédente que $f \circ f(x) - x \geqslant 0$. On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} - u_{2n} = f \circ f(u_{2n}) - u_{2n}) \geqslant 0$, donc la sous-suite (u_{2n}) est croissante. De même, (u_{2n+1}) est décroissante car tous ses termes appartiennent à un intervalle sur lequel $f \circ f(x) - x \leqslant 0$. Dans le cas où $a \leqslant 1-\sqrt{5}$, c'est exactement le même raisonnement en échangeant le rôles des indices pairs et impairs : la sous-suite (u_{2n}) sera alors décroissante (à valeurs dans $[-2, 1-\sqrt{5}]$), et (u_{2n+1}) croissante (à valeurs dans $[1-\sqrt{5}, 0]$).

(f) Étant monotones et bornées, elles convergent. Leur limite est nécessairement l'un des quatre points fixes de la fonction $f \circ f$ obtenus à la question *d*. Il faut tout de même être un peu soigneux :

- si $a = 1-\sqrt{5}$, la suite est constante, et ses deux sous-suites convergent donc évidemment vers $1-\sqrt{5}$.
- si $a > 1-\sqrt{5}$, la sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite l vérifiant $a \leqslant l \leqslant 0$, donc $l = 0$ (seul point fixe dans l'intervalle $[a, 0]$). De même, $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -2$ car $u_1 = f(a) \neq 1-\sqrt{5}$.
- si $a < 1-\sqrt{5}$ c'est le contraire : $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = -2$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$.

(g) La suite (u_n) n'est donc convergente que dans le cas où $a = 1+\sqrt{5}$.

8. Puisqu'on ne nous demande pas d'être précis, faisons vite :

- si $a = -1-\sqrt{5}$, on a déjà vu que la suite allait stationner à $1+\sqrt{5}$ à partir du rang 1.
- si $a < -1-\sqrt{5}$, $u_1 > 1+\sqrt{5}$ et on est ramenés au cas de la question 4, la suite diverge vers $+\infty$.
- si $a \in]-1-\sqrt{5}, -2[$, on aura $u_1 \in]0, 1+\sqrt{5}[$, ce qui ramène au cas de la question 6 : au bout d'un certain temps, un terme de la suite va se retrouver dans l'intervalle $[-2, 0]$, et ensuite la suite sera bornée, avec divergence (mais convergence des sous-suites constituées des termes d'indice pair et des termaes d'indice impair), sauf dans le cas où le premier terme de la suite appartenant à $]-2,0[$ est pile poil égal à $1-\sqrt{5}$, ce qui rendra la suite stationnaire.

9. D'après les études précédentes, outre les deux points fixes et la valeur $-1-\sqrt{5}$, les seules valeurs de a pour lesquelles la suite (u_n) converge sont celles pour lesquelles $a \in]-1-\sqrt{5}, 2[\cup]2, 1+\sqrt{5}[$, et qui stationnent à la valeur $1-\sqrt{5}$ à partir d'un certain rang. Peut-on décrire ces valeurs plus précisément ? Déjà, les valeurs négatives sont simplement les opposées des positives, on peut donc se restreindre à chercher les $a \in]2, 1+\sqrt{5}[$. Une façon des les construire est de procéder « à l'envers » : on part de $1-\sqrt{5}$, on calcule son antécédent positif (il y en a un seul), puis l'antécédent positif de cet antécédent positif et ainsi de suite. On obtiendra ainsi toutes les valeurs de a convenables, qui sont donc en nombre infini, et qu'on peut en fait définir... comme une suite récurrente ! Mais une suite récurrente donc la fonction de transition sera la réciproque de f (ou plutôt de sa restriction à $\mathbb{R}^+$, histoire d'avoir une fonction bijective, et car on a décidé de se limiter aux valeurs de a positives). En plus, on calcule facilement son expression : si $y = \frac{1}{2}(x^2-4)$, alors $x^2 = 2y+4$, donc $x = \sqrt{2y+4}$ quand on se limite aux valeurs positives. Autrement dit, donc, la suite (v_n) définie par $v_0 = 1-\sqrt{5}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{2v_n+4}$ va balayer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1-\sqrt{5}$. On pourrait même s'amuser à démontrer que la suite (v_n) converge elle-même vers $1+\sqrt{5}$ (ce n'est pas très difficile), ce qui prouve qu'il y aura au voisinage gauche de l'**autre** point fixe de f une accumulation de valeurs de a pour lesquelles la suite converge vers $1-\sqrt{5}$.

Exercice 4

1. Puisqu'une ligne complète est donnée, la somme est imposée (égale à 6), un exemple possible : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Si on note a la valeur commune de tous les coefficients, chaque ligne et chaque colonne a de façon évidente une somme égale à na, donc la matrice est semi-magique, et $s(M) = na$.
3. C'est une conséquence évidente des régles de calcul sur les sommes : $\sum_{j=1}^{n}(m_{ij}+\lambda n_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} + \lambda \sum_{j=1}^{n} n_{ij} = s(M)+\lambda s(N)$ (et de même pour les colonnes).
4. Supposons M semi-magique, et posons $A = MJ$, alors les coefficients de cette matrice sont donnés par $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \times 1 = s(M)$ (somme des coefficients de la ligne numéro i). De même, en notant $B = JM$, alors $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} = s(M)$ (somme des coefficients de la colonne numéro j). On a donc bien $MJ = JM = \lambda J$, avec tout bêtement $\lambda = s(M)$. Réciproquement, les calculs qu'on vient de faire montrent que, si $MJ = JM = \lambda J$, alors la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne de M est égale à λ, ce qui prouve que la matrice est semi-magique, et bien sûr que $s(M) = \lambda$. Je me rends compte après avoir fini de taper cette question que j'ai fait la démonstration dans le cas général et pas dans le cas $n = 3$ comme demandé par l'énoncé. Bien entendu, le cas général implique le cas particulier.
5. Si $(M,N) \in E^2$, alors $MNJ = M \times s(N)J = s(N)MJ = s(N)s(M)J$, et de même dans l'autre sens, ce qui prouve tout ce qui est demandé.
6. Là encore, si $MJ = s(M)J$ et que M est inversible, on peut faire le produit à gauche par M^{-1} pour en déduire que $J = s(M)M^{-1}J$, donc $\frac{1}{s(M)}J = M^{-1}J$. De même, $JM = s(M)J$ implique $\frac{1}{s(M)}J = JM^{-1}$. La matrice M^{-1} vérifie donc la caractérisation des matrices de E,

et $s(M^{-1}) = \dfrac{1}{s(M)}$. Bien sûr, aucun risque que $s(M) = 0$, sinon on aurait $JM = MJ = 0$, donc M ne pourrait pas être inversible.

7. Un exemple parmi pas mal d'autres : $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

8. Avec la définition d'une matrice magique, on peut calculer $(m_{11}+m_{22}+m_{33})+(m_{13}+m_{22}+m_{31})+(m_{12}+m_{22}+m_{32})-(m_{11}+m_{12}+m_{13})-(m_{31}+m_{32}+m_{33}) = s(M)+s(M)+s(M)-s(M)-s(M) = s(M)$. Or, tout se simplifie ou presque dans le membre de gauche pour donner $3m_{22} = s(M)$.

9. C'est évident puisque la transposition transforme les lignes en colonne, les colonnes en ligne, et ne modifie pas la somme des coefficients diagonaux ni celle des coefficients « anti-diagonaux ».

10. En reprenant le résultat de la question 8, et bien sûr le fait que M doit être symétrique, on doit avoir $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & \frac{1}{3}s(M) & d \\ c & d & e \end{pmatrix}$. La somme des coefficients anti-diagonaux devant être égale à $s(M)$, on en déduit que $c + \dfrac{1}{3}s(M) + c = s(M)$, donc $c = \dfrac{1}{3}s(M)$. La deuxième ligne (ou la deuxième colonne) impose $d = \dfrac{2}{3}s(M) - b$, et la diagonale impose $e = \dfrac{2}{3}s(M) - a$. La première ligne, la dernière ligne, la première colonne et la dernière colonne imposent alors toutes les quatre la condition $a + b = \dfrac{2}{3}s(M)$, donc $b = \dfrac{2}{3}s(M) - a$. En notant plutôt $z = \dfrac{1}{3}s(M)$, la matrice M est donc de la forme $M = \begin{pmatrix} a & 2z-a & z \\ 2z-a & z & a \\ z & a & 2z-a \end{pmatrix}$. Réciproquement, toutes les matrices de cette forme sont magiques (vérification facile, toutes les sommes sont égales à $3z$).

    Si M est antisymétrique, ses trois coefficients diagonaux sont nuls, donc $s(M) = 0$ d'après la question 8. On a donc $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$. La première ligne impose $a + b = 0$, donc $b = -a$, la deuxième impose $-a + c = 0$, donc $c = a$. Finalement, $M = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$.

    Réciproquement, toutes ces matrices conviennent.

11. Avec le théorème admis et les résultats de la question précédente, toute matrice magique est donc de la forme $a \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + b \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + c \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
    Techniquement, on vient de donner une base de l'ensemble des matrices magiques, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.