Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 5 : corrigé du sujet B

MPSI Lycée Camille Jullian

11 janvier 2025

Exercice 0

Si on pose $z = ai$, avec $a \in \mathbb{R}$, z est solution de l'équation si $-a^3i + (1-2i) \times (-a^2) + (1-2i) \times ai - 2i = 0$. En séparant les partie réelle et imaginaire, on obtient les deux équations $-a^2 + 2a = 0$ (pour la partie réelle) et $-a^3 + 2a^2 + a - 2 = 0$. La première équation se factorise en $a(2-a) = 0$ et admet donc 0 et 2 comme solutions. Si 0 n'est clairement pas solution de la deuxième équation obtenue, c'est par contre le cas pour $a = 2$: $-8 + 2 \times 4 + 2 - 2 = 0$. On a donc prouvé que $2i$ était solution de notre équation, ce qui permet de factoriser son membre de gauche sous la forme $z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i = (z-2i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b-2ia)z^2 + (c-2ib)z - 2ic$. Une rapide identification des coefficients donne $a = 1$, puis $b - 2i = 1 - 2i$, donc $b = 1$ aussi, et $c - 2i = 1 - 2i$, donc $c = 1$ (décidément), ce qui est cohérent avec le coefficient constant qu'on devrait avoir. Il reste donc à déterminer les racines du second facteur $z^2 + z + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$ et admet donc pour racines $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Puisqu'on nous demande les solutions sous forme exponentielle, $\mathcal{S} = \{2e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}$ (pas besoin de détailler les calculs, les formes exponentielles sont évidentes pour chacune des trois racines).

Exercice 1

1. Allons-y pour un peu de calcul :
   - Pour $n = 2$, $C_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \cos^2(0) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1^2 - 0^2 = 1$.
   - Pour $n = 3$, $C_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \cos^3\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \cos^3(0) - \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^3\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1^3 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$.
   - Pour $n = 4$, $C_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \cos^4\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \cos^4(0) - \cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^4\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + 0^4 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
   - Enfin, pour $n = 6$, $C_6 = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} (-1)^k \cos^2\left(\frac{k\pi}{6}\right) = 1^6 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \frac{1}{2^6} - 0^6 + \frac{1}{2^6} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1 - 2 \times \frac{27}{64} + 2 \times \frac{1}{64} = \frac{32 - 27 + 1}{32} = \frac{3}{16}$.
2. Lorsque $p = 0$, on a toujours $e^{\frac{2ikp\pi}{n}} = e^0 = 1$, indépendamment de la valeur de k, donc $T_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$. De même, lorsque $p = n$, $e^{\frac{2ikp\pi}{n}} = e^{2ik\pi} = 1$, donc $T_{n,p} = n$.

3. C'est un calcul de somme géométrique : $T_{n,1} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{2i\pi}{n}})^k = \frac{1-(e^{\frac{2i\pi}{n}})^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$.

4. C'est effectivement quasiment le même calcul : $T_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ikp\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{2ip\pi}{n}})^k = \frac{1-(e^{\frac{2ip\pi}{n}})^n}{1-e^{\frac{2ip\pi}{n}}} = \frac{1-e^{2ip\pi}}{1-e^{\frac{2ip\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{2ip\pi}{n}}} = 0$. La seule raison pour laquelle on ne peut pas faire ce même calcul lorsque $p = 0$ ou $p = n$ est que, dans ces deux cas, la raison de la suite géométrique dont on calcule la somme des termes est égale à 1 (ce qui ne peut pas se produire quand $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$).

5. (a) Si a et b sont deux nombres complexes quelconques et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$ (j'ai volontairement utilisé l'indice p pour la somme pour anticiper le calcul qu'on va faire à la question suivante).

   (b) On écrit donc à l'aide du binôme de Newton, pour tout entier k, $(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}})^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \times 1^{n-p} \times (e^{\frac{2ik\pi}{n}})^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} e^{\frac{2ikp\pi}{n}}$ (on a fait porter la puissance p au deuxième terme de la somme plutôt qu'au premier pour ne pas avoir à s'embêter ensuite avec un changement d'indices). Il ne reste plus qu'à inverser les deux sommes intervenant désormais dans le calcul de S_n : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} e^{\frac{2ikp\pi}{n}} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ikp\pi}{n}} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} T_{n,p}$.

   (c) Les calculs effectués plus haut montrent que tous les termes de la somme précédente sont nuls sauf les deux termes extrêmes, et donc que $S_n = \binom{n}{0} \times n + \binom{n}{n} \times n = n + n = 2n$.

6. C'est un calcul classique de factorisation par l'angle moitié puis d'utilisation des formules d'Euler : $1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}(e^{-\frac{ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}) = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}}$.

7. En élevant à la puissance n la relation obtenue à la question précédente, $\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}})^n}{2^n e^{ik\pi}}$. Or $e^{ik\pi} = \pm 1$ selon la parité de k, ce qu'on peut écrire sous la forme $e^{ik\pi} = (-1)^k$. On en déduit directement que $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}})^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} S_n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 2

1. On a $u_2 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$, $u_3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3}} = \sqrt{1+2\times 2} = \sqrt{5}$, et enfin $u_4 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{5}}}$. On n'arrivera pas à faire plus simple que ça. Pour comparer u_3 et u_4, puisque les deux nombres sont positifs, on peut comparer leurs carrés : $u_3^2 = 5$, et $u_4^2 = 1 + 2\sqrt{1+3\sqrt{5}}$. On en déduit que $u_4^2 - u_3^2 = 2\sqrt{1+3\sqrt{5}} - 4$. On aura donc $u_4 > u_3$ si et seulement si $2\sqrt{1+3\sqrt{5}} > 4$, soit $4(1+3\sqrt{5}) > 16$ (en élevant une deuxième fois au carré), donc $1 + 3\sqrt{5} > 4$, ce qui est clairement vrai puisque $\sqrt{5} > 1$. On a prouvé péniblement que $u_4 > u_3$. L'inégalité $u_3 > u_2$ est par contre complètement triviale.

2. Les fonctions $t \mapsto \sqrt{1+nt}$ sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ quelle que soit la valeur de n de façon évidente, et f_n est simplemant la composée de multiples de ces fonctions, donc sera elle aussi croissante.
3. Manifestement, $f_n(1) = u_n$. Mais la dernière racine carrée de $f_n(\sqrt{n+2})$ donne $(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{n+2}} = (n-1)\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)}}$, ce qui permet de constater que $f_n(\sqrt{n+2}) = u_{n+1}$. Comme on vient de prouver que la fonction f_n était croissante, et que $1 \leqslant \sqrt{n+2}$, on en déduit immédiatement $u_{\leqslant} u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante, comme pouvaient le laisser apparaître les premiers termes calculés plus haut.
4. Commençons le calcul par la droite : $\sqrt{1+n(n+2)} = \sqrt{1+n^2+2n} = \sqrt{(n+1)^2} = n+1$, puis $\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n(n+2)}} = \sqrt{1+(n-1)(n+1)} = \sqrt{1+n^2-1} = n$, et les simplications vont continuer à s'enchaîner jusqu'au calcul de la première racine carrée qui vaudra $\sqrt{1+2\times 4} = \sqrt{9} = 3$. Pour le démontrer plus rigoureusement, il faut faire une récurrence : au rang 2, $f_2(4) = \sqrt{1+2\times 4} = \sqrt{9} = 3$. Supposons désormais que $f_n(n+2) = 3$, alors $f_{n+1}(n+3) = f_n(\sqrt{1+(n+1)(n+3)}) = f_n(\sqrt{1+n^2+3n+n+3}) = f_n(\sqrt{n^2+4n+4}) = f_n(n+2) = 3$ par hypothèse de récurrence. La propriété est héréditaire, on a bien prouvé que, $\forall n \geqslant 2$, $f_n(n+2) = 3$.

   Comme $1 < n+2$, la croissance de la fonction f_n assure que $u_n = f_n(1) < f_n(n+2) = 3$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 3, elle converge.

5. (a) La fonction g_n est définie sur $\left[-\frac{1}{n}, +\infty\right[$. Étant continue et croissante (toujours comme composée de fonctions croissantes), g_n est certainement bijective de son intervalle de définition vers son image $[0, +\infty[$. De plus, si y est un réel positif, $g_n(t) = y \Leftrightarrow \sqrt{1+nt} = y \Leftrightarrow 1+nt = y^2 \Leftrightarrow t = \dfrac{y^2-1}{n}$, donc la réciproque de g_n est définie par $h_n(x) = \dfrac{x^2-1}{n}$. D'après le théorème de la bijection, elle a le tableau de variations suivant :

x	0		π
h_n	$-\frac{1}{n}$	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) Calculons simplement $h_n(n+1-x) = \dfrac{(n+1-x)^2-1}{n} = \dfrac{(n+1)^2-1-2(n+1)x+x^2}{n} = \dfrac{n^2+2n}{n} - \dfrac{2(n+1)}{n}x + \dfrac{x^2}{n} = n+2-\dfrac{2(n+1)}{n}x + \dfrac{x^2}{n}$. Le terme $\dfrac{x^2}{n}$ étant positif, l'inégalité demandée en découle.

   (c) Si on ne devine pas immédiatement ce qui se passe en regardant la relation de récurrence, on calcule deux ou trois termes supplémentaires de la suite : $v_3 = 2 \times \dfrac{3}{2} \times v_2 = 3c$, $v_4 = 2 \times \dfrac{4}{3} \times 3c = 2 \times 4c$, $v_5 = 2 \times \dfrac{5}{4} \times v_4 = 4 \times 5c$. On peut alors conjecturer que $v_n = 2^{n-3} \times nc$, ce qui se prouve aisément par récurrence : pour $n = 2$, $2^{2-3} \times 2c = \dfrac{1}{2} \times 2c = c$, la formule est donc correcte. Si on la suppose vérifiée au rang n, alors $v_{n+1} = 2 \times \dfrac{n+1}{n} v_n = 2 \times \dfrac{n+1}{n} \times 2^{n-3}nc = 2^{n-2}(n+1)c$, ce qui prouve bien la validité de la formule pour tout entier $n \geqslant 2$.

   On a trivialement $\lim\limits_{k \to +\infty} v_n = +\infty$ (rappelons que c est une constante positive !), et $n+1-v_n = (n+1)(1-2^{n-2}c)$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1-v_n) = -\infty$.

(d) La fonction f_n définie en début d'exercice peut s'écrire sous la forme $g_2 \circ g_3 \circ \cdots \circ g_n$. Elle est donc bijective, de réciproque $h_n \circ h_{n-1} \cdots \circ h_2$. En passant à la réciproque, comme on sait que $u_n = f_n(1)$, la condition $u_n \geqslant 3 - c$ est donc équivalente à avoir $1 \geqslant h_n \circ h_{n-1} \ldots\ldots \circ h_2(3-c)$. Exploitons désormais les inégalités prouvées à la question b : $h_2(3-c) \geqslant 4-2\times\dfrac{3}{2}\times c = 4-3c$. On remarque donc que $h_2(3-c) \geqslant v_3$ (avec les notations de la question c). Prouvons en fait par récurrence que $h_n \ldots h_{n-1}\circ\cdots\circ h_2(3-c) \geqslant n+2-v_{n+1}$. On vient de faire l'initialisation pour $n=2$. Supposons l'inégalité vraie au rang n, alors la croissance de h_{n+1} assure que $h_{n+1} \circ h_n \circ \cdots \circ h_2(3-c) \geqslant h_{n+1}(n+2-v_{n+1}) \geqslant n+3-2\times\dfrac{n+2}{n+1}\times v_n = n+3-v_{n+2}$ en reprenant l'inégalité de la question b, ce qui prouve bien l'hérédité de notre récurrence.

Puisque la suite $(n+1-v_n)$ tend vers $-\infty$, il existe certainement un entier n_0 pour lequel elle prend une valeur inférieur à 1, ce qui prouve d'après le calcul précédent que $u_n \geqslant 3-c$.

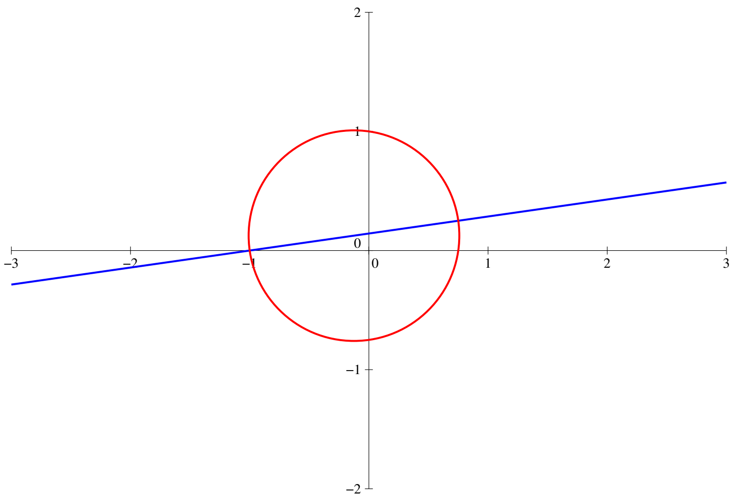
(e) On sait déjà que la suite (u_n) converge vers une limite $l \leqslant 3$. L'inégalité précédente montre que $3-c \leqslant l$, et comme elle est vraie pour tout réel positif c, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Problème

A. Un exemple d'homographie dans $\mathbb{C}$.

1. On peut tout démontrer d'un seul coup en calculant directement l'expression de la réciproque. Si on note $Z = \dfrac{4z-3-i}{z+1}$, alors $Zz + Z = 4z-3-i$, donc $Z+3+i = z(4-Z)$. Le nombre complexe Z admet donc un unique antécédent si $Z \neq 4$, et son expression est donnée par $z = \dfrac{Z+3+i}{4-Z}$. L'application f est donc bijective de $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{4\}$, et $f^{-1}(z) = \dfrac{z+3+i}{4-z}$.
2. L'équation est équivalente à $4z-3-i = z^2+z$, donc $z^2-3z+3+i=0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 9-4(3+i) = -3-4i$. On cherche un nombre complexe $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On obtient (en ajoutant comme d'habitude l'équation aux modules) les trois conditions $a^2-b^2=-3$, $2ab=-4$ et $a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{9+16} = 5$. La somme et la différence des équations extrêmes donnent $2a^2=2$, donc $a=\pm1$, et $2b^2=8$, donc $b=\pm2$. Il faut prendre a et b de signe opposé pour avoir $2ab=-4$, on choisit donc par exemple $\delta = 1-2i$. On obtient alors les deux points fixes $z_1 = \dfrac{3+1-2i}{2} = 2-i$, et $z_2 = \dfrac{3-1+2i}{2} = 1+i$.
3. Quitte à élever au carré (tout est réel et positif), l'équation est équivalente à $|z-2+i|^2 = 4\times|z-1-i|^2$. En posant $z=a+ib$, on a donc $(a-2)^2+(b+1)^2 = 4(a-1)^2+4(b-1)^2$, soit $a^2-4a+4+b^2+2b+1 = 4a^2-8a+4+4b^2-8b+4$, donc $3a^2-4a+3b^2-10b+3=0$. Quitte à tout diviser par trois, on reconnaît en effet une équation de cercle : $a^2-\dfrac{4}{3}a+b^2-\dfrac{10}{3}b+1 = \left(a-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{4}{9}+\left(b-\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{25}{9}+1$, l'équation est donc équivalente à $\left(a-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(b-\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{20}{9}$. Il s'agit donc du cercle de centre $I\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}i\right)$ et de rayon $R = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.
4. Puisqu'on nous le propose, posons $z=a+ib$, alors $f(z) = \dfrac{4a+4ib-3-i}{a+1+ib}$
$= \dfrac{(4a-3+4ib-i)(a+1-ib)}{(a+1)^2+b^2} = \dfrac{(4a-3)(a+1)-i(4ab-3b)+i(4b-1)(a+1)+4b^2-b}{(a+1)^2+b^2}$
$= \dfrac{4a^2+a-3+4b^2-b+i(7b-a-1)}{(a+1)^2+b^2}$. L'image $f(z)$ a donc pour partie réelle $\dfrac{4a^2+a+4b^2-b-3}{(a+1)^2+b^2}$ et pour partie imaginaire $\dfrac{7b-a-1}{(a+1)^2+b^2}$.

5. $f(z) \in \mathbb{R}$ si la partie imaginaire calculée ci-dessus est nulle, donc si $7b - a - 1 = 0$, autrement dit so $b = \frac{1}{7}a + \frac{1}{7}$. Il s'agit de la droite d'équation $y = \frac{1}{7}x + \frac{1}{7}$ dans le plan complexe (privée du point d'affixe -1 si on veut être tout à fait rigoureux).
6. Cette fois-ci, c'est la partie réelle qui doit être nulle, on veut donc $4a^2 + a - 3 + 4b^2 - b = 0$, soit $a^2 + \frac{1}{4}a + b^2 - \frac{1}{4}b - \frac{3}{4} = 0$. Il s'agit d'une équation de cercle : $\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64} + \left(b - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64} - \frac{3}{4} = 0$, soit $\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^2$. On reconnaît le cercle centré en $\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i\right)$, de rayon $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ (là encore, il faut enlever le point d'affixe -1 qui appartient bel et bien à ce cercle.
7. Question supprimée, pour information l'ensemble en question est une ellipse, que vous n'auriez donc pas du tout pu reconnaître !
8. On n'a donc que deux ensembles à représenter, la droite de la question 4 (en bleu) et le cercle de la question 5 (en rouge) :



B. Étude d'un exemple de suite homographique réelle.

1. Calculons donc : $u_1 = \frac{2-4}{1+6} = -\frac{2}{7}$, puis $u_2 = \frac{-\frac{4}{7} - 4}{-\frac{2}{7} + 6} = \frac{-32}{40} = -\frac{4}{5}$, $u_3 = \frac{-\frac{8}{5} - 4}{-\frac{4}{5} + 6} = \frac{-28}{26} = -\frac{14}{13}$, et enfin $u_4 = \frac{-\frac{28}{13} - 4}{-\frac{14}{13} + 6} = \frac{-80}{64} = -\frac{5}{4}$. La suite semble assez clairement décroissante.
2. Commençons par constater que $f(x) = \frac{2x + 12 - 16}{x + 6} = 2 - \frac{16}{x+6}$, ce qui prouve que f est strictement croissante sur l'intervalle $] - 6, +\infty[$. De plus, on constate que $f(1) = -\frac{2}{7} < 1$ (c'est le calcul de u_2 effectué à la question précédente), et que $f(-2) = \frac{-4-4}{-2+6} = -2$. Puisque f est croissante, on a donc $f([-2, 1]) = \left[-2, -\frac{2}{7}\right] \subset [-2, 1]$. ON prouve alors facilement par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-2, 1]$, ce qui prouve en particulier que $u_n \neq -6$.
3. Vérifions que -2 est bien le seul point fixe : $\frac{2x - 4}{x + 6} = x \Leftrightarrow 2x - 4 = x^2 + 6x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0$, donc -2 est bien le seul point fixe de f.

4. On pose donc $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$. Calculons alors $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} + 2} = \dfrac{1}{\frac{2u_n - 4}{u_n + 6} + 2} = \dfrac{u_n + 6}{2u_n - 4 + 2u_n + 12} = \dfrac{u_n + 6}{4u_n + 8}$. Une petite astuce belge : $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2 + 4}{4u_n + 8} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{4u_n + 8} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{u_n + 2} = v_n + \dfrac{1}{4}$.
En effet, la suite (v_n) est bien arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$.
5. On calcule $v_0 = \dfrac{1}{u_0 + 2} = \dfrac{1}{3}$, et on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{n}{4} = \dfrac{4 + 3n}{12}$. Comme $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$, $u_n = \dfrac{1}{v_n} - 2 = \dfrac{12}{4 + 3n} - 2 = \dfrac{4 - 6n}{4 + 3n}$.
6. La forme $u_n = \dfrac{12}{4 + 3n} - 2$ permet de montrer facilement que (u_n) est décroissante comme conjecturé en début d'exercice. Toujours sous cette forme, on constante que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ (suite arithmétique de raison strictement positive).