Devoir Surveillé n$^{\mathrm{o}}$ 5 : Sujet B

MPSI Lycée Camille Jullian

11 janvier 2025

Exercice 0

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+(1-2i)z^2+(1-2i)z-2i=0$, sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure, et donner ses solutions sous forme exponentielle.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer la somme $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^n$, pour un entier $n \geqslant 2$. On utilisera pour cela les sommes $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n$, et $T_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ikp\pi}{n}}$, avec p un entier compris entre 0 et n.

1. Calculer la valeur de C_n pour $n=2$, $n=3$ et $n=4$ (un bonus sera accordé aux courageux qui calculeront aussi C_6).
2. Que vaut $T_{n,p}$ lorsque $p=0$? Et lorsque $p=n$?
3. Redémontrer par le calcul la formule $T_{n,1}=0$ vue en cours (sommes des racines n-èmes de l'unité).
4. Démontrer par un calcul similaire que $T_{n,p}=0$ pour tout entier p vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n-1$.
5. (a) Rappeler l'énoncé de la formule du binôme de Newton.

   (b) Utiliser cette formule pour montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}T_{n,p}$.

   (c) En déduire que $S_n = 2n$.
6. Justifier que $1+e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}$.
7. Exploiter les résultats précédents pour démontrer que $C_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à la suite (u_n) définie (pour tout entier $n \geqslant 2$) par $u_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}$. On posera également, pour tout réel positif t, $f_n(t) = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+nt}}}}}$.

1. Calculer les valeurs de u_2 et u_3. Écrire u_4 le plus simplement possible. Comparer les trois valeurs obtenues (on déterminera en particulier soigneusement quelle valeur est la plus grande entre u_3 et u_4).
2. Montrer sans le moindre calcul de dérivée que les fonctions f_n sont toutes croissantes sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer $f_n(1)$ et $f_n(\sqrt{n+2})$ (on n'attend pas des valeurs explicites ici, mais quelque chose en lien avec l'exercice). En déduire la monotonie de la suite (u_n).
4. Calculer $f_n(n+2)$ (cette fois-ci, on doit obtenir quelque chose de très explicite !). En déduire que (u_n) est majorée, puis que la suite (u_n) converge.
5. On note désormais $g_n(t) = \sqrt{1+nt}$.
   (a) Préciser le domaine de définition de g_n, et montrer que les fonctions g_n (pour $n \geqslant 2$) sont bijectives vers un intervalle à préciser. Donner l'expression explicite ainsi que le tableau de variations de la réciproque h_n de la fonction g_n.
   (b) Montrer que $\forall x > 0$, $h_n(n+1-x) \geqslant n+2-2\times\dfrac{n+1}{n}\times x$.
   (c) Soit (v_n) une suite définie par $v_2 = c$, où c est un réel strictement positif, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2\times\dfrac{n+1}{n}\times v_n$.
   Exprimer v_n en fonction de n et de c. En déduire la limite de (v_n), puis celle de $(n+1-v_n)$, quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Montrer que, si un entier n vérifie $n+1-v_n \leqslant 1$, alors $u_n \geqslant 3-c$.
   (e) Démontrer que (u_n) converge en fait vers 3.

Problème

On rappelle que toute fonction de la forme $f : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, avec c **ou** d non nul (histoire que le dénominateur ne soit pas tout le temps nul), est appelée homographie. On souhaite étudier dans ce problème quelques objets (suite, fonction) faisant intervenir des homographies. Les deux parties du problème sont indépendantes.

A. Un exemple d'homographie dans $\mathbb{C}$.

Dans cette partie, on pose $f(z) = \dfrac{4z - 3 - i}{z + 1}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ vers un ensemble à déterminer, et donner l'expression de sa réciproque f^{-1}.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = z$.
3. On note C l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z - 2 + i| = 2 \times |z - 1 - i|$. Montrer qu'il s'agit d'un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
4. En posant $z = a + ib$, calculer la forme algébrique de $f(z)$.
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $f(z) \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $f(z) \in i\mathbb{R}$.
7. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $f(z) \in \mathbb{U}$. (Question finalement supprimée de l'énoncé car infaisable avec vos connaissances !).
8. Représenter dans un même repère les trois ensembles obtenus aux questions 4, 5 et 6.

B. Étude d'un exemple de suite homographique réelle.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 4}{u_n + 6}$. On notera dans cette partie f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-6\}$ par $f(x) = \dfrac{2x - 4}{x + 6}$.

1. Calculer les premiers termes de la suite (u_n) (jusqu'à u_4). Que peut-on conjecturer sur la monotonie de la suite ?
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -6$ (ce qui prouve que la suite (u_n) est bien définie).
3. Déterminer l'unique point fixe de la fonction f (donc l'unique réel vérifiant $f(x) = x$). On notera désormais ce réel α.
4. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.
5. En déduire l'expression explicite de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.
6. Préciser la monotonie éventuelle de la suite (u_n), ainsi que les limites (si elles existent) de u_n et de v_n.