

Devoir Surveillé n° 5 : corrigé du sujet A

MPSI Lycée Camille Jullian

11 janvier 2025

Exercice 1

On commence par effectuer un changement de variable en posant $Z = \frac{z+1}{z-1}$. L'équation devient alors $Z^3 + \frac{1}{Z^3} = 0$, ce qui implique $Z^6 = -1$. Les racines sixièmes de -1 sont les nombres de la forme $Z_k = e^{i\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}$ (avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$), puisque $-1 = e^{i\pi}$ admet pour racine sixième primitive $e^{i\frac{\pi}{6}}$. Il reste à remonter jusqu'au calcul de z . L'équation $Z = \frac{z+1}{z-1}$ donne $Zz - Z = z + 1$, donc $Z + 1 = Zz - z$, soit $z = \frac{Z+1}{Z-1}$. Or, si $Z = e^{i\theta}$, une factorisation par l'angle moitié (ou plutôt deux) donne $z = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2})}{2i\sin(\frac{\theta}{2})} = -\frac{i}{\tan(\frac{\theta}{2})}$. En reprenant des notations cohérentes avec les précédentes, il faut commencer par calculer $z_0 = -\frac{i}{\tan(\frac{\pi}{12})}$. Pour retrouver rapidement cette tangente pas totalement remarquable, on écrit par exemple $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, puis on applique une formule d'addition : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\tan(\frac{\pi}{3}) - \tan(\frac{\pi}{4})}{1 + \tan(\frac{\pi}{3})\tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}$. On en déduit que $z_0 = -\frac{i}{2 - \sqrt{3}} = \frac{-i(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = -i(2 + \sqrt{3})$. Ensuite, $z_1 = -\frac{i}{\tan(\frac{\pi}{4})} = -i$, puis $z_2 = -\frac{i}{\tan(\frac{5\pi}{12})} = -\frac{i}{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12})} = -i \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = i(\sqrt{3} - 2)$. Les trois dernières valeurs sont simplement les opposées des trois premières : $z_4 = i(2 - \sqrt{3})$, $z_5 = i$ et $z_6 = i(2 + \sqrt{3})$.

Exercice 2

1. Il faut faire une récurrence. Au rang initial, $S_0 = u_0 = \pm 1 \in \mathbb{Z}$, et si on suppose que $S_n \in \mathbb{Z}$, alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ est la somme de deux entiers relatifs, donc reste un entier relatif.
2. Si on se contente de prendre la suite constante égale à 1, la suite (S_n) ne prendra jamais la valeur 0. Il faut donc par exemple poser $u_0 = -1$ puis $\forall n \geq 1, u_n = 1$. On aura alors $S_0 = -1$ et $\forall n \geq 1, S_{n+1} = S_n + 1$, donc (S_n) sera une suite arithmétique de raison 1 et d'expression explicite $S_n = n - 1$, qui prend bien exactement une fois chaque valeur entière naturelle. La suite (u_n) n'est pas unique, on aurait aussi pu prendre $u_0 = u_1 = -1$ puis $\forall n \geq 2, u_n = 1$ (la suite S_n va alors « descendre jusqu'à -2 » avant de remonter et de passer par tous les entiers naturels). Il est en fait assez facile de voir qu'il existe une infinité de suites convenables.
3. On peut construire (u_n) de la façon suivante : un terme initial égal à 1 (pour avoir $S_0 = 1$), puis deux termes consécutifs égaux à -1 (pour que S_n descende jusqu'à la valeur -1), puis trois termes consécutifs égaux à 1 pour remonter jusqu'à 2, quatre termes égaux à -1 pour redescendre jusqu'à -2 et ainsi de suite. C'est en fait assez pénible de faire une démonstration rigoureuse du fait que cette suite convient.

On ne peut pas obtenir exactement une fois chaque valeur entière. En effet, si c'était le cas, la suite (S_n) serait nécessairement constante à partir du rang 1 : s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $u_n = 1$ et $u_{n+1} = -1$ (ou le contraire), alors $S_{n+1} = S_{n-1}$, ce qui contredit le fait que (S_n) prend exactement une fois chaque valeur. Or, il n'y a que quatre suites (u_n) constantes à partir du rang 1 (on choisit la valeur de u_0 puis le signe de u_n pour tous les termes à partir de l'indice 1), qui donnent toutes des suites arithmétiques d'expressions $u_n = -1 + n$, $u_n = -1 - n$, $u_n = 1 + n$ et $u_n = 1 - n$. Elles sont soit majorées, soit minorées par leur premier terme, et ne prennent pas toutes les valeurs entières.

4. « On voit bien que » les termes d'indice pair de (S_n) seront égaux à 1, et les termes d'indice impair égaux à 0. Une formule unique pour décrire cela est par exemple $S_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$. On prouve la constatation intuitive par récurrence. Pour $n = 0$, $S_0 = 1$ et $\frac{1 + (-1)^0}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$, ça marche. Supposons ensuite que, pour un certain entier n , $S_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$, alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} + (-1)^{n+1} = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence. Bien sûr, la suite (S_n) a donc deux valeurs infiniment répétées : 0 et 1 (elle ne prend d'ailleurs aucune autre valeur que ces deux-là).
5. C'est encore une fois assez facile à décrire intuitivement : n premiers termes égaux à 1 (pour monter jusqu'à $S_{n-1} = n$), puis n termes suivants égaux à -1 (on aura $S_{2n-1} = 0$), les n d'après égaux à 1 et ainsi de suite. Si on veut être précis, on choisira donc $u_p = 1$ si p est un entier vérifiant $p \in \{kn, kn + 1, \dots, (k + 1)n - 1\}$, avec k pair, et $u_p = -1$ si $p \in \{kn, kn + 1, \dots, (k + 1)n - 1\}$, avec k impair. Autrement dit, $u_p = (-1)^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor}$ convient.
6. Supposons par l'absurde que ce soit le cas, et que (S_n) admette par exemple 0 comme unique valeur infiniment répétée (le raisonnement est identique si on remplace 0 par un autre entier). L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid S_n = 0\}$ est donc infini. L'ensemble $B = \{n + 1 \mid n \in A\}$ est donc lui aussi infini. Or, pour tout entier n appartenant à B , on aura $S_n = \pm 1$ puisque $S_n = S_{n-1} + u_n$, avec par hypothèse $S_{n-1} = 0$ et $u_n = \pm 1$. On a donc une infinité de valeurs de la suite (S_n) qui sont égales à ± 1 . C'est impossible si ni 1 ni -1 ne sont des valeurs infiniment répétées de la suite, ce qui prouve l'absurdité de notre hypothèse.
7. (a) L'ensemble dont on cherche le minimum est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ minorée par p (par définition) et non vide car il contient au moins l'entier q (puisque'on a fait l'hypothèse $S_q = b \geq S_p = a$, qui est la seule à vérifier pour avoir q dans notre ensemble), il admet donc un minimum.
- (b) La définition de n_1 impose $S_{n_1} \geq c$. Supposons par l'absurde que $S_{n_1} > c$, alors $S_{n_1} > a$, donc $n_1 \neq p$. Comme $n_1 \geq p$, cela implique que $n_1 - 1 \geq p$. De plus, $S_{n_1-1} = S_{n_1} \pm 1$ est lui-même supérieur ou égal à c si S_{n_1} est un entier strictement supérieur à c . Comme par ailleurs les entiers suivants $(n_1, \dots, q)$ vérifient $S_i \geq c$ à cause de l'hypothèse faite sur n_1 , on se rend alors compte que $n_1 - 1$ vérifie lui aussi l'hypothèse de définition du minimum $n - 1$. Autrement dit, on a un entier strictement inférieur à notre minimum dans notre ensemble, c'est absurde. On a donc bien $S_{n_1} = c$.
- (c) C'est évident, $p \leq n_1$ par définition, et on a déjà dit que q appartenait à l'ensemble minoré par n_1 . On a démontré une sorte d'équivalent du théorème des valeurs intermédiaires : pour passer de $S_p = a$ à $S_q = b$, la suite (S_n) doit nécessairement prendre au moins une fois chaque valeur entière comprise entre a et b .
- (d) Si $a = b$ le résultat est trivial. Et si $a > b$, on peut faire exactement le même raisonnement en changeant le sens de toutes les inégalités. Le résultat est donc toujours vrai.
8. Supposons par l'absurde que la valeur c n'est pas une valeur infiniment répétée. Autrement dit l'ensemble des valeurs de la suite (S_n) égales à c est fini, et admet donc un maximum n_0 . La valeur a étant quant à elle infiniment répétée, $\exists n_1 > n_0$, $S_{n_1} = a$. De même, $\exists n_2 > n_0$,

$S_{n_2} = b$. D'après la question précédente, il existe alors un entier compris entre n_1 et n_2 (et donc strictement supérieur à n_0) pour lequel $S_n = c$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur n_0 . La valeur c est donc aussi infiniment répétée.

9. Soit $k \in \mathbb{Z}$, par définition de la limite, si (S_n) tend vers $+\infty$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, S_n > k$. Il existe donc au maximum n_0 valeurs pour lesquelles on peut avoir $S_n = k$, ce qui prouve que k ne peut pas être une valeur infiniment répétée de (S_n) . La suite n'admet donc dans ce cas aucune valeur infiniment répétée.
10. Si $(|S_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$, alors il existe un entier k pour lequel on ne peut **pas** trouver d'entier n_0 à partir duquel $|S_n|$ est toujours strictement supérieur à k . Autrement dit, pour cet entier k , il existe nécessairement une infinité de valeurs de n vérifiant $|S_n| \leq k$, donc $S_n \in \{-k, \dots, k\}$. Si on note, pour un entier i , $A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid S_n = i\}$, alors $A_{-k} \cup A_{-k+1} \cup \dots \cup A_k$ est un ensemble infini. Comme une union finie d'ensembles finis est finie, cela implique qu'au moins un des ensembles A_i est infini, ce qui revient exactement à dire qu'il existe un entier i qui est une valeur infiniment répétée de la suite (S_n) .
11. On peut prendre un exemple très similaire à celui donné en question 3 : $u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = u_3 = 1, u_4 = u_5 = -1$, puis trois termes égaux à 1, trois termes égaux à -1 etc, pour avoir des « vagues » de plus en plus hautes qui reviennent toujours jusqu'à 0 avant chaque nouvelle montée. Chaque « vague » étant de longueur finie ($2n$ pour la vague qui part de 0, monte jusqu'à n puis redescend à 0), il y a une infinité de vagues et 0 est donc une valeur infiniment répétée de (S_n) puisque 0 est atteint à chaque vague. Par ailleurs, si $k > 0$, l'entier k est atteint une première fois lors de la vague numéro k , puis sera à nouveau atteint deux fois lors de chacune des vagues suivantes (une fois en montant, une fois en descendant). Il s'agit donc d'une valeur infiniment répétée, ce qui prouve bien que tout entier naturel est infiniment répété pour (S_n) . Bien sûr, aucune valeur strictement négative ne peut être infiniment répétée pour cette suite puisqu'elle ne prend que des valeurs positives.
12. Une telle suite admet en fait tous les entiers relatifs comme valeurs infiniment répétées. Supposons une nouvelle fois par l'absurde que k est un entier qui n'est pas infiniment répété pour une telle suite. Alors il existe un entier n_0 pour lequel $S_{n_0} = k$ (toute valeur est nécessairement atteinte au moins une fois par une telle suite en application du « théorème des valeurs intermédiaires » démontré plus haut puisqu'elle doit prendre des valeurs arbitrairement grandes et arbitrairement négatives), mais $S_n \neq k$ pour tout entier $n > n_0$. Supposons par exemple $u_{n_0+1} = 1$, donc $S_{n_0+1} = k+1$ (l'autre cas est similaire). Alors tout entier $p < k$ ne sera plus jamais atteint par la suite (S_n) après l'indice n_0 , toujours en vertu du théorème des valeurs intermédiaires démontré plus haut (sinon, on devrait atteindre la valeur k après l'indice n_0 pour passer de la valeur $k+1$ à la valeur p). La suite (S_n) sera donc minorée par k à partir de l'entier n_0 , donc minorée tout court (il n'y a qu'un nombre fini de termes avant l'indice n_0), ce qui contredit les hypothèses faites.

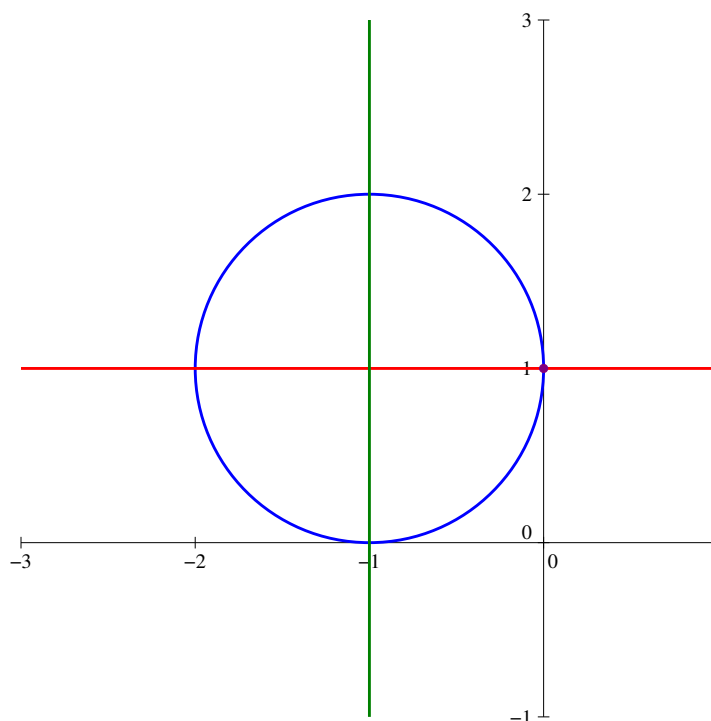
Problème

A. Un exemple d'homographie complexe.

1. On peut tout faire à la fois en cherchant simplement l'expression de la réciproque. Si on pose $Z = f(z) = \frac{iz + 1 + 2i}{z - i}$, alors $Zz - iZ = iz + 1 + 2i$, donc $z(Z - i) = iZ + 1 + 2i$. Cette équation admet une unique solution lorsque $Z \neq i$, donnée par $z = \frac{iZ + 1 + 2i}{Z - i} = f(Z)$. Ce calcul prouve bien que f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ vers lui-même, et accessoirement que $f^{-1} = f$.
2. En posant $z = a + ib$, $f(z) = \frac{ia - b + 1 + 2i}{a + ib - i} = \frac{(1 - b + i(a + 2))(a + i(1 - b))}{(a^2 + (b - 1)^2)}$

$$= \frac{a(1 - b) + (a + 2)(b - 1) + i(a(a + 2) + (1 - b)^2)}{a^2 + (b - 1)^2} = \frac{2b - 2 + i(a^2 + 2a + b^2 - 2b + 1)}{a^2 + (b - 1)^2}.$$

3. En reprenant le calcul précédent, on veut que la partie imaginaire de $f(z)$ soit nulle, et donc que $a^2 + 2a + b^2 - 2b + 1 = 0$. On reconnaît une équation de cercle : $(a+1)^2 - 1 + (b-1)^2 = 0$. Il s'agit du cercle de centre $A(-1+i)$ et de rayon 1 (privé du point d'affixe i qui appartient à ce cercle).
4. C'est encore plus simple, on doit cette fois-ci avoir $2b - 2 = 0$, donc $b = 1$, ce qui correspond à l'équation d'une droite « horizontale » dans le plan complexe (à nouveau privée du point d'affixe i si on veut être rigoureux).
5. Cette fois-ci, il vaut nettement mieux repartir de l'expression initiale de $f : f(z) \in \mathbb{U}$ si $\left| \frac{iz + 1 + 2i}{z - i} \right|$, donc si $|iz + 1 + 2i| = |z - i|$. en posant maintenant $z = a + ib$ (et en élevant tout au carré pour ne pas traîner des racines carrées inutiles), on obtient l'équation équivalente $(1-b)^2 + (a+2)^2 = a^2 + (b-1)^2$, donc $a^2 + 4a + 4 = a^2$. Finalement, il reste simplement $a = -1$, l'ensemble recherché est donc cette fois-ci une droite « verticale ».
6. Le cercle de la question 3 est en bleu, la droite de la question 4 en rouge et celle de la question 5 en vert :



7. On résout donc l'équation $iz + 1 + 2i = z^2 - iz$, soit $z^2 - 2iz - 1 - 2i = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = -4 + 4 + 8i = 8i$. Pas vraiment besoin d'utiliser la méthode habituelle pour déterminer un nombre complexe δ vérifiant $\delta^2 = \Delta$, on peut, pour une fois, procéder sous forme exponentielle : $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$, on peut donc choisir $\delta = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2 + 2i$. On en déduit les deux points fixes de $f : z_1 = \frac{2i + 2 + 2i}{2} = 1 + 2i$, et $z_2 = \frac{2i - 2 - 2i}{2} = -1$. On notera donc $\alpha = -1$ et $\beta = 1 + 2i$.
8. Calculons donc $\frac{f(z) - 1 - 2i}{f(z) + 1} = \frac{\frac{iz+1+2i}{z-i} - 1 - 2i}{\frac{iz+1+2i}{z-i} + 1} = \frac{iz + 1 + 2i - (z-i)(1+2i)}{iz + 1 + 2i + z - i}$
 $= \frac{-z(1+i) - 1 + 3i}{z(1+i) + 1 + i} = -\frac{z + \frac{1-3i}{1+i}}{z+1}$ en factorisant en haut et en bas par $1+i$. Or, $\frac{1-3i}{1+i} = \frac{(1-3i)(1-i)}{2} = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i = -\beta$, donc on retrouve bien $\frac{f(z) - \beta}{f(z) - \alpha} = -\frac{z - \beta}{z - \alpha} = \frac{z - \beta}{\alpha - z}$.

9. On pose $z = a+ib$ et on élève tout au carré : $|a+ib-1-2i|^2 = 4|a+ib+1|^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = 4(a+1)^2 + 4b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 - 4b + 4 = 4a^2 + 8a + 4 + 4b^2 \Leftrightarrow 3a^2 + 10a + 3b^2 + 4b - 1 = 0$.
On divise tout par trois pour reconnaître l'équation de cercle : $a^2 + \frac{10}{3}a + b^2 + \frac{4}{3}b - \frac{1}{3} = 0$,
donc $\left(a + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + \left(b + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = 0$, soit encore $\left(a + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(b + \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2$.
Il s'agit du cercle de centre $B\left(-\frac{5}{3} - \frac{2}{3}i\right)$ et de rayon $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.
10. Il faut au maximum éviter les calculs compliqués, en exploitant le résultat de la question 8.
On a supposé $|z - \beta| = 2|z - \alpha|$, donc $\frac{|f(z) - \beta|}{|f(z) - \alpha|} = \frac{|z - \beta|}{|z - \alpha|} = 2$. Autrement dit, $|f(z) - \beta| = 2|f(z) - \alpha|$, ce qui prouve que $f(z)$ appartient au cercle qu'on vient de déterminer à la question précédente ! Réciproquement, si z est l'affixe d'un point du cercle, alors $f(z)$ (qui appartient au cercle comme on vient de le voir) est aussi un antécédent par f de z puisque $f^{-1} = f$, donc tout point du cercle est bien image par f d'un point du cercle. Autrement dit, notre cercle a pour image lui-même par f .

B. Suites homographiques réelles à unique point fixe.

1. L'équation $f(x) = x$ est équivalente à $ax + b = cx^2 + dx$ donc $cx^2 + (d-a)x - b = 0$. Cette question est donc complètement triviale.
2. D'après la question 1, on aura donc $f(\beta) = \beta$. Si on impose $u_0 = \beta$, alors $u_1 = f(\beta) = \beta$ et ainsi de suite, la suite est constante égale à β (récurrence triviale).
3. On sait déjà que β est un antécédent de β par f . Or, c'est le seul : l'équation $f(x) = \beta$ est équivalente à l'équation du premier degré $ax + b = c\beta x + d\beta$, soit $(a - c\beta)x = d\beta - b$. Cette équation aura une solution unique, sauf éventuellement si $a - c\beta = d - b = 0$. Or, β étant racine double du polynôme P , on peut affirmer que $\beta = \frac{a-d}{2c}$, donc $a - c\beta = \frac{a+d}{2}$. Pour avoir $a - c\beta = d - b = 0$, il faudrait donc $d = -a$ et $d\beta = b$, donc $-a\beta = b$, soit $-a \times \frac{-2d}{2c} = b$, ce qui implique $ad = bc$. Or, cette possibilité est justement exclue dans l'énoncé !

Une fois qu'on sait que β n'a qu'un seul antécédent par f , on a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \beta \Rightarrow u_n = \beta$, donc par contraposée $u_n \neq \beta \Rightarrow u_{n+1} \neq \beta$. Une récurrence triviale suffit alors à conclure.

4. Attention, calcul bien moche en perspective. Le but est de prouver que $v_{n+1} - v_n$ est constant (égal à r). On calcule donc $\frac{1}{u_{n+1} - \beta} - \frac{1}{u_n - \beta} = \frac{u_n - u_{n+1}}{(u_{n+1} - \beta)(u_n - \beta)}$. On va calculer séparément numérateur et dénominateur. Commençons par le numérateur : $N = u_n - u_{n+1} = u_n - \frac{au_n + b}{cu_n + d} = \frac{cu_n^2 + (d-a)u_n - b}{cu_n + d}$. Au numérateur de N , avec les notations de l'énoncé, on reconnaît $P(u_n)$ qui est par hypothèse égal à $c(u_n - \beta)^2$. On en déduit donc que $N = \frac{c(u_n - \beta)^2}{cu_n + d}$.
On passe au dénominateur, ou plutôt directement à son inverse : $\frac{1}{(u_{n+1} - \beta)(u_n - \beta)} = \frac{1}{(f(u_n) - f(\beta))(u_n - \beta)}$. Or, $\frac{1}{f(u_n) - f(\beta)} = \frac{1}{\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\beta + b}{c\beta + d}} = \frac{(cu_n + d)(c\beta + d)}{(au_n + b)(c\beta + d) - (cu_n + d)(a\beta + d)} = \frac{(cu_n + d)(c\beta + d)}{u_n(ad - bc) + \beta(bc - ad)} = \frac{(cu_n + d)(c\beta + d)}{(ad - bc)(u_n - \beta)}$.
On recolle les morceaux : $v_{n+1} - v_n = \frac{c(u_n - \beta)^2}{cu_n + d} \times \frac{(cu_n + d)(c\beta + d)}{(ad - bc)(u_n - \beta) \times (u_n - \beta)} = \frac{c(c\beta + d)}{ad - bc} = r$. On a bien prouvé que la suite auxiliaire (v_n) était arithmétique de raison r .

5. Puisque $v_0 = \frac{1}{u_0 - \beta} = \frac{1}{\alpha - \beta}$, on se contentera d'écrire que $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{\alpha - \beta} + nr = \frac{1 + nr(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta}$. On en déduit que $u_n = \beta + \frac{1}{v_n} = \beta + \frac{\alpha - \beta}{1 + nr(\alpha - \beta)}$.
6. Le dénominateur de la fraction précédente ayant toujours une limite infinie quand $\alpha \neq \beta$. On ne peut pas avoir $r = 0$ sinon on aurait $c\beta + d = 0$, donc $a\beta + b = 0$ puisque $a\beta + n = \beta(c\beta + d)$, et donc $\beta = -\frac{d}{c} = -\frac{b}{a}$, d'où $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ donc $ad - bc = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. La suite (u_n) a donc une limite égale à β , indépendamment de la valeur de α .

C. Quelques généralités sur les homographies complexes.

- En admettant que les constantes vont être « négligeables » par rapport aux termes en z qui vont « tendre vers l'infini », il est logique de poser $f(\infty) = \frac{a}{c}$, du moins quand a et c sont non nuls. Si a et c sont nuls tous les deux, la fonction f est constante, cas qui aurait été exclu par l'énoncé. Si $a = 0$ mais $c \neq 0$, on aura logiquement $f(\infty) = 0$, ce qu'on peut inclure dans le cas précédent. Enfin, si $c = 0$ avec $a \neq 0$, on aura $f(\infty) = \infty$.
- On va séparer, comme à la question précédente, deux ou même plutôt trois cas différents :
 - si a et c sont tous les deux non nuls, on fait un calcul similaire à celui de la toute première question du problème : si $Z = \frac{az + b}{cz + d}$, alors $cZz + dZ = az + b$, donc $z(cZ - a) = b - dZ$. Tout nombre complexe autre que $Z = \frac{a}{c}$ admet donc un unique antécédent par f , égal à $f^{-1}(Z) = \frac{b - dZ}{cZ - a}$, ce qui est bien l'expression d'une homographie. De plus, comme on a posé $f(\infty) = \frac{a}{c}$, on aura $f^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty$, ce qui tombe bien puisque $\frac{a}{c}$ était justement le seul complexe n'ayant pas encore d'image par f^{-1} . Enfin, on complète en imposant $f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$, ce qui est cohérent à la fois avec l'expression obtenue pour l'homographie f^{-1} et les règles définies à la question précédente, et surtout avec le fait que $-\frac{d}{c}$ était le seul élément de $\overline{C}$ à ne pas encore avoir d'image par f^{-1} en tant que valeur interdite de f . On a donc bien créé une bijection de $\overline{C}$ vers lui-même.
 - si $a = 0$ et $c \neq 0$, on a $f(z) = Z = \frac{b}{cz + d}$, avec $f(\infty) = 0$, et $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$. On trouve alors $z = \frac{1}{c} \left(\frac{b}{Z} - d \right) = \frac{b - dZ}{cZ}$, expression valable pour tout nombre complexe non nul. Encore une fois, on complète de façon cohérente en posant $f^{-1}(0) = \infty$ et $f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$, ce qui donne bien une application bijective dont la réciproque reste une homographie.
 - dernier cas, si $a \neq 0$ mais $c = 0$, on a donc $f(z) = Z = az + b$ (quitte à renommer a et b , on peut imposer $d = 1$), avec $f(\infty) = \infty$ et exceptionnellement aucune valeur interdite. Dans ce cas, $f^{-1}(Z) = \frac{1}{a}Z - \frac{b}{a}$, qui est une homographie sans valeur interdite vérifiant $f^{-1}(\infty) = \infty$, donc tout colle une fois de plus.
- Un calcul bête et méchant : si $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ et $g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, alors $g \circ f(z) = \frac{\alpha \times \frac{az + b}{cz + d} + \beta}{\gamma \times \frac{az + b}{cz + d} + \delta} = \frac{(\alpha a + \beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)z + \gamma b + \delta d}$, qui est bien l'expression d'une homographie. On a donc prouvé que l'ensemble des homographies est un sous-ensemble de l'ensemble des bijections de $\overline{C}$ dans lui-même qui est stable par composition et par passage à la réciproque. C'est un sous-groupe (même pas besoin de vérifier la présence du neutre dans le sous-ensemble mais l'application identité est bel et bien une homographie, obtenue pour $a = 1$ et $b = c = d = 0$).

4. Là encore, il y a quelques cas à distinguer :

- si aucun des trois éléments u , v et w ne sont infinis, on a donc les conditions (avec les notations habituelles) $u = f(\infty) = \frac{a}{c}$, $v = f(0) = \frac{b}{d}$ et $w = f(1) = \frac{a+b}{c+d}$. Remarquons tout de suite que d est non nul et qu'on peut lui imposer la valeur 1. En effet, si on multiplie chacun des quatre coefficients a , b , c et d par une même constante, on définira en fait exactement la même homographie, ce qui permet d'en normaliser un. Une fois imposé $d = 1$, on a donc $b = v$, puis $w = \frac{a+v}{c+1}$, soit $a+v = cw + c$, avec la condition restante $a = cu$. On remplace : $cu + v = cw + c$, donc $c = \frac{v}{w+1-u}$, ce qui impose à son tour une valeur unique pour a . L'homographie est donc bien unique (et existe).
 - si $u = \infty$, on veut donc $f(\infty) = \infty$, ce qui impose $c = 0$. Restent les conditions $v = \frac{b}{d}$, où on impose comme tout à l'heure $d = 1$ donc $b = v$, et $w = a + v$ qui donne $a = w - v$.
 - si $v = \infty$, on a $f(0) = \infty$, donc $d = 0$. Cette fois, on va imposer $c = 1$ (il ne peut pas être nul), et on a les deux autres conditions $u = a$ (puisque $c = 1$) qui impose la valeur de a , puis $w = a + b$, donc $b = w - a = w - u$.
 - enfin, si $w = \infty$, on doit avoir $c + d = 0$, donc $d = -c$. On impose alors $c = 1$ et $d = -1$, et on a les conditions restantes $u = a$ et $v = -b$ qui permettent de conclure trivialement.
5. Il y avait en fait une erreur dans l'énoncé dans la définition du birapport : pour que la formule de la question a fonctionne, il faut définir le birapport comme l'image par z de l'homographie vérifiant $f(u, v, w) = \Omega$ (donc f est la réciproque de ce qui est écrit dans l'énoncé).
- (a) Avec la bonne définition, on cherche donc $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ vérifiant $f(u) = \infty$, $f(v) = 0$ et $f(w) = 1$. La condition $f(v) = 0$ impose $av + b = 0$, permet de « transformer » $az + b$ (le numérateur du calcul de $f(z)$) en $az + b - (av + b) = a(z - v)$. De même, la condition $f(u) = \infty$ impose $cu + d = 0$, donc $cz + d = cz + d - (cu + d) = c(z - u)$. Ces deux calculs permettent d'affirmer que $f(z) = \frac{a}{c} \times \frac{z-v}{z-u}$. Or, on a une dernière information à disposition : $f(w) = 1$, donc $\frac{aw+b}{cw+d} = 1$, ou encore (avec la même astuce que pour z), $\frac{a}{c} \times \frac{w-v}{w-u} = 1$, donc $\frac{a}{c} = \frac{w-u}{w-v}$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'expression de $f(z)$ pour obtenir l'expression du birapport demandée dans l'énoncé.
- (b) Il y a a priori $4! = 24$ permutations possibles des quatre variables mais heureusement, certaines donnent le même quotient. Par exemple, si on échange à la fois les valeurs de u et v , et celles de w et z , on retombe sur la même expression : $\frac{\frac{z-v}{z-u}}{\frac{w-v}{w-u}} = [u, v, w, z]$. Si on est assez masochiste pour tester toutes les possibilités, on doit obtenir six valeurs différentes possibles :
- le birapport reste aussi inchangé si on fait les échanges $u \leftrightarrow w$ et $v \leftrightarrow z$, ou si on fait les échanges $u \leftrightarrow z$ et $v \leftrightarrow w$.
 - le birapport est transformé en son inverse si on fait simplement l'échange $w \leftrightarrow z$ (ainsi que trois autres possibilités de permutation, je ne vais pas les donner toutes à chaque fois).
 - le birapport r (je lui donne un nom, ce sera plus facile) est changé en $1 - r$ si on fait l'échange $v \leftrightarrow w$. En effet, $\frac{w-u}{w-v} \times \frac{z-v}{z-u} + \frac{v-u}{v-w} \times \frac{z-w}{z-u} = \frac{(w-u)(z-v) - (v-u)(z-w)}{(w-v)(z-u)}$

$$= \frac{wz - uz - vw + uv - vz + vw + uz - uw}{wz - vz - uw + uv} = 1$$
 (c'est merveilleux, non ?).
 - le birapport r est transformé en $\frac{1}{1-r}$ si on compose les deux cas précédents, donc en remplaçant z par v , w par z et v par w .

- le birapport r est transformé en $\frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r}$ en composant les deux mêmes cas, mais dans l'autre sens, donc en remplaçant v par z , z par w et w par v .
- enfin, le birapport r est transformé en $\frac{r}{r-1}$ si on compose le cas précédent par le deuxième, par exemple en échangeant simplement v et z .

Il est assez logique que ça s'arrête là, puisque les six formules obtenues forment bel et bien un groupe pour la composition (ça doit vous rappeler un bel exercice de la feuille sur les groupes).

- (c) On peut démontrer ce résultat de façon subtile, mais on peut aussi faire un calcul très bourrin, ce qui me semble une façon raisonnable de terminer ce corrigé : si g est l'homographie définie par l'équation $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, alors $[g(u), g(v), g(w), g(z)] = \frac{\frac{aw+b}{cw+d} - \frac{au+b}{cu+d}}{\frac{aw+b}{cw+d} - \frac{av+b}{cv+d}} \times \frac{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{av+b}{cv+d}}{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{au+b}{cu+d}}$. Le produit des dénominateurs en haut et en bas étant identique, on peut simplement tout même brutalement au même dénominateur pour obtenir
- $$\frac{((aw+b)(cu+d) - (au+b)(cw+d)) \times ((az+b)(cv+d) - (av+b)(cz+d))}{((aw+b)(cv+d) - (av+b)(cw+d)) \times ((az+b)(cu+d) - (au+b)(cz+d))}$$
- $$= \frac{((bd-ad)u + (ad-bc)w) \times ((ad-bc)z + (bc-ad)v)}{((ad-bc)w + (bc-ad)v) \times ((ad-bc)z + (bc-ad)u)}.$$
- Miracle, on peut tout simplifier joyeusement par $ad-bc$ pour retomber sur $\frac{w-u}{w-v} \times \frac{z-v}{z-u}$, c'est-à-dire exactement l'expression de $[u, v, w, z]$. Bon, les plus pointilleux feront remarquer à juste titre que le calcul devrait être adapté si l'une des valeurs intervenant dedans est infinie. C'est tout à fait exact, les détails en sont laissés au lecteur (sinon, on peut invoquer des arguments de continuité pour éviter les cas particuliers, mais comme on n'a pas encore évoqué ce genre de chose sur des fonctions complexes, encore moins avec un point à l'infini, on va éviter).