Devoir Surveillé n° 3

MPSI Lycée Camille Jullian

9 novembre 2024

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}^*$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

1. En supposant que f vérifie l'équation précédente, déterminer la valeur de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ en choisissant bien les valeurs de x et y à introduire dans l'équation fonctionnelle.
2. Montrer que f est nécessairement une fonction impaire.
3. Montrer que f est solution sur $]0,+\infty[$ d'une équation différentielle de la forme $xf' - f = kx$.
4. Résoudre l'équation précédente, et en déduire les solutions du problème posé (on commencera par donner l'expression de $f(x)$ sur $]0,+\infty[$, puis on complètera pour définir f sur $\mathbb{R}$ tout entier).
5. Vérifier qu'il existe une unique solution f vérifiant $f(e) = e$, puis effectuer une étude rapide de la fonction f (limite, variations, courbe, **pas** d'étude de convexité).

Exercice 2

Le but de cet exercice est de calculer la limite de la somme suivante : $S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$, limite qu'on pourrait également écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Préciser les valeurs de S_0, S_1, S_2 et S_3. La suite (S_n) est-elle monotone ? En admettant qu'elle converge, donner un encadrement raisonnable de sa limite (sans chercher à être précis).
2. On note désormais $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)$. Rappeler les formules possibles pour la dérivée de la fonction tangente, et en déduire la valeur de I_1.
3. En constatant que $I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(x)) \tan^2(x)\ dx$, calculer la valeur de I_2.
4. Montrer plus généralement que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$.
5. Expliquer pourquoi la suite (I_n) est une suite décroissante.
6. En exploitant les deux questions précédentes, montrer que $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant \frac{1}{4n+2}$, et en déduire la limite de la suite (I_n).
7. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_{n+1}$. On pourra essayer de faire une récurrence rigoureuse, mais une démonstration plus rudimentaire « avec des petits points » sera aussi tolérée.
8. Déduire de la formule précédente la limite de la suite (S_n), et préciser une méthode permettant de calculer une valeur approchée de π à 10^{-3} près en exploitant les calculs précédents (on ne fera pas explicitement les calculs, mais on précisera bien jusqu'où il est nécessaire d'effectuer le calcul de S_n pour obtenir la précision demandée).

Exercice 3

Le but de cet exercice est de résoudre par diverses méthodes l'équation différentielle $(E) : x^2y'' - xy' + y = x$. La résolution s'effectuera uniquement sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Les questions 1 et 2 sont indépendantes, mais on pourra utiliser les résultats de la question 1 pour répondre à la question 2.c si on n'a pas réussi à répondre correctement à la question 2.b.

1. Première méthode : on effectue le changement de variable $t = \ln(x)$, et on pose $y(x) = z(t)$.
   (a) Montrer que y est solution de l'équation (E) si et seulement si z est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants à déterminer.
   (b) Résoudre l'équation obtenue à la question précédente.
   (c) En déduire les solutions de l'équation (E).
2. Deuxième méthode : on pose cette fois-ci $w(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.
   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si la fonction $v = w'$ est solution de l'équation du premier ordre $x^2v' + xv = 1$.
   (b) Résoudre l'équation précédente, puis retrouver les solutions de l'équation (E).
   (c) Résoudre le problème de Cauchy constitué de l'équation (E) et des conditions initiales suivantes : $y(1) = 1$ et $y'(1) = -1$.

Exercice 4

On pose pour tout cet exercice $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

1. Déterminer rigoureusement le domaine de définition de f, et préciser tout aussi rigoureusement les intervalles sur lesquels f est dérivable.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Calculer les images suivantes : $f(0)$, $f(1)$, $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
4. Déterminer les antécédents par f de $\dfrac{\pi}{4}$ et de $\dfrac{3\pi}{4}$.
5. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
6. Calculer la dérivée f' de f uniquement sur l'intervalle $]0, +\infty[$. En déduire les variations de f (sur tout son domaine de définition).
7. À l'aide de l'expression de f' obtenue à la question précédente, déterminer une expression simplifiée de f valable sur $]0, +\infty[$. Déterminer de même une expression simplifiée de f valable sur $]-\infty, 0[$.
8. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$. Déterminer sans calcul supplémentaire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ (on expliquera quand même pourquoi aucun calcul n'est nécessaire). Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative de f au voisinage de 0 ?
9. Tracer une allure soignée de cette courbe, ainsi que de ses asymptotes éventuelles, et tangentes remarquables éventuelles.
10. Montrer que, si $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, alors $\dfrac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \cos(2\theta)$.
11. En posant $x = \tan(\theta)$ dans la définition de $f(x)$, retrouver les expressions simplifiées de f obtenues en question 7.