Devoir Surveillé n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

14 septembre 2024

Exercice 1

Pour s'échauffer, quelques résolutions d'équations et d'inéquations (dans $\mathbb{R}$ à chaque fois) :

1. $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$
2. $2e^x - e^{-x} = 1$
3. $\ln(x-2) + \ln(x+1) < \ln(2x-1)$
4. $\sqrt{3x+1} \leq 2x-1$
5. $\frac{x+1}{x^2-4} > \frac{x-1}{x+2}$
6. $|x^2 - x - 1| = |x^2 + 2x + 5|$

Exercice 2

Soit (u_n) une suite réelle a priori quelconque. Exprimer à l'aide d'énoncés quantifiés les propriétés suivantes :

1. la suite (u_n) ne prend que des valeurs entières.
2. la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. la suite (u_n) n'est pas croissante (au sens large).
4. la suite (u_n) est majorée par 5.
5. la suite (u_n) admet un maximum égal à 5 (on aura le droit d'introduire un « et » dans l'énoncé si besoin).
6. la suite (u_n) est bornée (majorée et minorée).
7. la suite (u_n) est une suite géométrique.
8. la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$, sachant qu'on peut quantifier le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ de la façon suivante : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq M$.
9. Une dernière question indépendante de ce qui précède :
L'implication « (u_n) n'est pas majorée $\Rightarrow (u_n)$ a pour limite $+\infty$ » est-elle vraie ? Indépendamment de la réponse proposée, donner la réciproque ainsi que la contraposée de cette implication.

Exercice 3

On pose dans cet exercice $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f . La fonction est-elle paire ou impaire (ou aucun des deux) ?
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer que $f(x) - 2 = \frac{(x+1)^2}{2 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}}$. En déduire que f est minorée par 2. Ce minorant est-il atteint ?
4. En exploitant un calcul proche de celui effectué à la question précédente, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$.
Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative de la fonction f ? Effectuer la même étude du côté de $-\infty$ (attention, ce n'est probablement pas la limite de $f(x) - x$ qu'il faudra calculer de ce côté-là...).

5. Étudier les variations de la fonction f .
6. Calculer la dérivée seconde f'' de la fonction f , en déduire la convexité de f (on doit obtenir des choses vraiment simples).
7. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f .

Problème (d'après un vieux sujet de bac)

I. Étude d'une fonction.

Le but de cette première partie est d'étudier la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x > 0$, et $f(0) = 1$. On rappelle qu'une fonction f est dérivable en 0 si le quotient $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ admet une limite quand x tend vers 0, cette limite étant alors égale à $f'(0)$. On rappelle également qu'il est toujours autorisé d'intégrer des inégalités : si $f(t) \leq g(t)$ sur l'intervalle $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

1. (a) Si on pose $h(x) = \ln(1+x)$, préciser le domaine de définition de la fonction h , et préciser la valeur de $h'(0)$.
 (b) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$. Que peut-on en déduire concernant la fonction f ?
2. (a) Montrer que, $\forall t \geq 0$, $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.
 (b) En déduire que, si $x \geq 0$, alors $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
3. On définit pour cette question g sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$.
 (a) Montrer que $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$ pour tout réel $x \geq 0$.
 (b) Quel encadrement peut-on en déduire pour $g(x)$ (toujours pour $x \geq 0$) ?
4. À l'aide de la fonction g , étudier les variations de f .
5. (a) Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$ (en essayant d'être le plus rigoureux possible).
 (b) En exploitant les questions précédentes, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
 (c) En déduire que f est dérivable en 0, et donner l'équation de la tangente à sa courbe représentative en 0.
 (d) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f .

II. Une étude de suite.

On définit désormais la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Il est bien entendu autorisé (et même fortement conseillé!) d'utiliser si besoin les encadrements et autres résultats de la première partie du problème (y compris ceux donnés par l'énoncé qu'on n'a pas réussi à démontrer).

1. Justifier que la suite est bien définie (autrement dit, qu'on n'aura jamais de problème de définition du $\ln$ pour le calcul de u_{n+1}), et étudier sa monotonie. En déduire la convergence de la suite (u_n) . Montrer que sa limite est nécessairement nulle.
2. On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Déterminer la limite de $v_{n+1} - v_n$.
3. Montrer que, $\forall x \in]0, 1]$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ (on pourra utiliser la fonction g définie plus haut).
4. En déduire que $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2}$, puis que $\frac{2}{n+2} \leq u_n \leq \frac{4}{n+4}$.
5. Déterminer la limite de nu_n quand n tend vers $+\infty$.