Devoir Surveillé n^o 10 (devoir bilan)

MPSI Lycée Camille Jullian

5 juin 2025

Exercice 1

On dispose pour cet exercice de deux urnes à la composition différente : l'urne U_1 contient deux boules bleues et deux boules rouges, alors que l'urne U_2 contient une seule boule bleue et trois boules rouges. On effectue des tirages dans ces urnes en respectant le protocole suivant :

- le premier tirage s'effectue dans l'urne U_1
- si on tire une boule bleue lors d'un tirage, alors le tirage suivant s'effectuera dans l'urne U_1 ; si au contraire on tire une boule rouge, le tirage suivant s'effectuera dans U_2
- après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne dans laquelle on vient de la tirer (autrement dit, la composition des urnes restera identique tout au long du processus)

1. On note B_n l'évènement « On a tiré une boule bleue au n-ème tirage » et b_n sa probabilité. Donner la valeur de b_1, b_2 et b_3 (on justifiera bien entendu soigneusement les calculs effectués).
2. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{B_2}(B_3)$ et $\mathbb{P}_{B_3}(B_2)$. Les évènements B_2 et B_3 sont-ils indépendants ?
3. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules bleues lors des n premiers tirages ? Et celle de ne tirer que des boules rouges lors de ces n premiers tirages ? Quelle est la probabilité de ne jamais tirer deux boules de suite de la même couleur lors des $2n$ premiers tirages ?
4. On note A_n l'évènement « le n-ème tirage a été effectué dans l'urne U_1 » et u_n sa probabilité. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
5. Calculer explicitement u_n en fonction de n, ainsi que sa limite éventuelle quand n tend vers $+\infty$.
6. En déduire la valeur de b_n lorsque $n \geqslant 1$, ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter les résultats obtenus dans les deux dernières questions.
7. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$. Que représente concrètement cette somme ?
8. Uniquement pour cette dernière question, on change le protocole en effectuant désormais des tirages **sans remise**.
   (a) En conservant les notations introduites en début d'exercice, calculer b_1, b_2 et b_3.
   (b) Quel est le nombre minimal de tirages qu'on pourra effectuer avant de devoir s'arrêter avec ce protocole ? Et le nombre maximal ?
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement « On effectue le nombre minimal de tirages possible ».

Exercice 2

On note dans cet exercice $E = \{f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}\}$. On pose par ailleurs, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) = \dfrac{1}{(1+x)^k}$, et on pose enfin $g(x) = \ln(1+x)$, et on note $\mathcal{B}_n = (g, f_0, f_1, \dots, f_n)$.

1. Liberté de la famille $\mathcal{B}_n$.
   (a) On suppose l'existence de réels $(\mu, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $\mu g + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$. Montrer par un argument simple faisant intervenir un calcul de limite qu'on a nécessairement $\mu = 0$.
   (b) Montrer par ailleurs que $(f_0, \dots, f_n)$ est une famille libre.
   (c) En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $E_n = \text{Vect}(g, f_0, \dots, f_n)$.
2. On pose dans cette question $n = 2$ et on définit sur l'espace E_2 une application φ par $\varphi(f) = (1+x)f'(x)$ (abus de notation ici pour dire qu'il s'agit de la **fonction** $x \mapsto (1+x)f'(x)$).
   (a) Calculer les images par φ de la fonction g et des fonctions f_0, f_1 et f_2.
   (b) En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace E_2.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de φ.
   (d) Donner la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi)$, et calculer M^2.
   (e) Calculer le polynôme caractéristique de M, en déduire ses valeurs propres.
   (f) Calculer les vecteurs propres de φ associés à chacune de ses valeurs propres. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Et φ^2 ?
3. Résolution d'équations différentielles.
   (a) Résoudre sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle $(1+x)y' = \ln(1+x)$. On note h_1 la solution de cette équation différentielle vérifiant $h_1(0) = 0$.
   (b) Résoudre sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle $(1+x)y' = h_1(x)$. On note h_2 la solution de cette équation différentielle vérifiant $h_2(0) = 0$.
   (c) On note plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 1$, h_{n+1} la solution s'annulant en 0 de l'équation $(1+x)y' = h_n(x)$. Donner une expression explicite de la fonction h_n.

Exercice 3

Le but de ce problème est d'étudier les racines de la famille des polynômes de Taylor de la fonction exponentielle.

A. Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans cette partie, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = P - P'$. Il n'est pas demandé de démontrer que f est bien un endomorphisme.

0. Rappeler le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction exponentielle.
1. Calculer la matrice M_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Préciser le déterminant de la matrice M_n. L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?
3. Calculer les puissances et l'inverse de la matrice M_2 (on donnera explicitement les neuf coefficients de la matrice M_2^k). La formule obtenue pour M_2^k est-elle aussi valable lorsque $k < 0$?
4. Montrer qu'il existe une unique base $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $f(P_i) = \dfrac{X^i}{i!}$.
5. Calculer explicitement la base (Q_0, Q_1, Q_2) dans le cas particulier $n = 2$.

B. Racines des polynômes P_n.

On note dans cette deuxième partie $P_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$, et $Q_n(X) = P_n(nX)$. Ainsi, par exemple, $Q_2 = P_2(2X) = 1 + (2X) + \frac{(2X)^2}{2} = 1 + 2X + 2X^2$. Par abus de notation, on notera également P_n et Q_n les fonctions polynômiales définies sur $\mathbb{R}$ dont l'expression est celle des polynômes P_n et Q_n.

1. Étudier la fonction P_3, et représenter dans un même repère les courbes de P_3, de P_1 et de la fonction exponentielle, en respectant les positions relatives de ces trois courbes.
2. Démontrer par récurrence que P_n admet une unique racine réelle lorsque n est impair, et n'a pas de racine réelle lorsque n est pair. On notera désormais α_n la racine de P_n (uniquement définie lorsque $n = 2k + 1$ est impair).
3. On **admet** pour la suite de l'exercice que $\forall k \geqslant 1$, $\alpha_{2k+1} > -2k - 1$. Montrer que la suite (α_{2k+1}) est décroissante.
4. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\lim_{k \to +\infty} \alpha_{2k+1} = -\infty$ (on pourra commencer par prouver que, si (α_{2k+1}) convergeait vers $l \in \mathbb{R}$, alors $P_{2k+1}(\alpha_{2k+1})$ convergerait vers e^l).
5. On introduit dans cette question la fonction h définie par $h(x) = xe^{1-x}$.
   (a) Effectuer une étude rapide de la fonction h (variations, limite, allure de courbe).
   (b) Montrer que la restriction de h à l'intervalle $]-\infty, -1]$ admet une réciproque g, dont on tracera une allure de courbe (sans justification) dans le même repère que celle de h.
   (c) Montrer qu'il existe un unique réel β tel que $h(\beta) = -1$ et montrer que $\beta \in]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}[$. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0.69$.
6. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 1$ et $|ze^{1-z}| \leqslant 1$.
   (a) Justifier que $1 - e^{-nz}Q_n(z) = (ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}$.
   (b) En déduire que $|1 - e^{-nz}Q_n(z)| \leqslant 1 - e^{-n}Q_n(1)$.
   (c) En déduire que z n'est pas racine de Q_n.
7. Montrer à l'aide de la question précédente que $\alpha_n < n\beta$.
8. Dernière question bonus, pour ceux qui auront encore du temps après avoir traité tout le reste :
   (a) Montrer que, $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^{-u}P_n(u) = 1 + \frac{1}{n!}\int_u^0 t^n e^{-t}\, dt$ (on pourra partir de la formule de Taylor avec reste intégral de la fonction exponentielle et faire un changement de variable simple dans l'intégrale).
   (b) Soit $n = 2k + 1$ un entier impair. En notant $\gamma_n = \frac{\alpha_{2k+1}}{2k+1}$, montrer que $\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n\, dt = -\frac{n!e^n}{n^{n+1}}$, où h est la fonction étudiée en question 5.
   (c) À l'aide de l'équivalent de Stirling $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n} \times n^n}{e^n}$, montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_{\gamma_n}^0 h(t)^n\, dt = 0$.
   (d) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \int_{\gamma_n}^{\beta} h(t)^n\, dt = 0$, puis déterminer un équivalent de α_{2k+1} quand k tend vers $+\infty$.