Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 9 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

12 mars 2025

Exercice : formule de Stirling.

1. Puisqu'on nous le suggère si gentiment, posons donc $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$, la valeur de c ayant été fixée appartenant à l'intervalle $]a, b[$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ comme somme de f (supposée $\mathcal{C}^2$) et d'un polynôme du second degré. De plus, $\varphi(a) = f(a) - 0 = 0$, $\varphi(b) = f(b) - 0 = 0$ et $\varphi(c) = f(c) - \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(c-a)(c-b) = f(c) - f(c) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle sur chacun des deux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$, on en déduit l'existence de deux réels $y \in]a, c[$ et $z \in]c, b[$ tels que $f'(y) = f'(z) = 0$. On peut alors appliquer une troisième fois le théorème de Rolle à la fonction f' sur l'intervalle $[y, z]$ pour en déduire l'existence d'un réel $d \in]y, z[$ (et donc a fortiori $d \in]a, b[$) tel que $\varphi''(d) = 0$. Or, $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(c)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - \dfrac{f(c)(x-a)}{(c-a)(c-b)}$, puis $\varphi''(x) = f''(x) - 2\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$. L'annulation de $\varphi''(d)$ revient bien à affirmer que $f''(d) = \dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$, ou encore que $f(c) = \dfrac{f''(d)(c-a)(c-b)}{2}$.

2. (a) On pose donc $h(x) = g(x) - g(a) \times \dfrac{x-b}{a-b} - g(b) \times \dfrac{x-a}{b-a}$. La fonction h étant somme de g et d'une fonction affine, on constaate que $h'' = g''$. En appliquant le résultat de la question précédente à un réel $x \in]a, b[$, on obtient donc l'existence d'un réel $d \in]a, b[$ tel que $h(x) = \dfrac{g''(d)(x)(x-b)}{2}$. En particulier, l'hypothèse faite sur la fonction g'' fait que $\dfrac{M(x-a)(x-b)}{2} \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{m(x-a)(x-b)}{2}$ (attention au retournement du sens de l'encadrement quand on multiplie par la quantité $(x-a)(x-b)$ qui est négative quand $x \in]a, b[$), soit exactement l'encadrement demandé. Si on veut être très rigoureux, on vérifie que l'encadrement reste vrai si $x = a$ ou $x = b$ (ce qui est trivial puisque $h(a) = h(b) = 0$).

   (b) Une primitive de $x \mapsto x - a$ est donnée par $x \mapsto \dfrac{(x-a)^2}{2}$, de même pour $x \mapsto x - b$ (ce choix de primitives simplifie le calcul), donc $\displaystyle\int_a^b g(a) \times \frac{x-b}{a-b} + g(b) \times \frac{x-a}{b-a}\, dx = \left[\frac{g(a)(x-b)^2}{2(a-b)} + \frac{g(b)(x-a)^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{g(b)(b-a)}{2} - \frac{g(a)(a-b)}{2} = \frac{(b-a)(g(a)+g(b))}{2}$.

   (c) Il suffit d'intégrer l'encadrement obtenu en question a entre les bornes a et b. On a déjà effectué le calcul permettant d'otenir le terme du milieu à la question précédente, reste à calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{M(x-a)(x-b)}{2}\, dx = \frac{M}{2}\int_a^b x^2 - (a+b)x + ab\, dx = \frac{M}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(a+b)x^2}{2} + abx\right]_a^b = \frac{M}{2}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} - \frac{ab^2}{2} - \frac{b^3}{2} + \frac{a^3}{2} + \frac{a^2b}{2} + ab^2 - a^2b\right) = \frac{M}{2} \times \frac{a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b}{6}$

$= \dfrac{M(a-b)^3}{12} = -\dfrac{M(b-a)^3}{12}$. Le calcul du majorant est identique en remplaçant M par m.

3. Calculons : $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln(x)\ dx = [x\ln(x) - x]_n^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - n\ln(n) + n = (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1$. On veut appliquer l'encadrement de la question 2.c à la fonction ln avec $a = n$ et $b = n+1$. Sur cet intervalle, $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ puis $g''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, ce qui montre que $M = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$ et $m = -\dfrac{1}{n^2}$ (la fonction g'' est trivialement croissante sur $[n, n+1]$), ce qui donne les bonnes valeurs pour les minorant et majorant de l'encadrement puisque $-\dfrac{M((n+1)-n)^2}{12} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ et de même $-\dfrac{m(b-a)^3}{12} = \dfrac{1}{12n^2}$. Reste à calculer le membre du milieu, qui est égal d'après le calcul d'intégrale qu'on vient d'effectuer à $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1 - \dfrac{\ln(n+1)+\ln(n)}{2} = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n+1) - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n) - 1$, soit exactement ce qui était souhaité.

4. Il y a comme toujours trois choses à vérifier :

   - $v_n - u_n = \dfrac{1}{12(n-1)}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.
   - $u_{n+1} - u_n = \ln((n+1)^{n+\frac{3}{2}}e^{-n-1}) - \ln((n+1)!) - \ln(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}) + \ln(n!) = \ln\left(\dfrac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{en^{n+\frac{1}{2}}}\right) - \ln(n+1) = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n+1) - 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n)$. Or, on vient de prouver à la question précédente que cette expression était encadrée entre deux valeurs manifestement positives, ce qui prouve donc que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, et que la suite (u_n) est donc croissante.
   - $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{12n} - u_n - \dfrac{1}{12(n-1)} = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 - \dfrac{1}{12n(n-1)}$. Toujours d'après l'encadrement de la question 3, cette quantité est majorée par $\dfrac{1}{12n^2} - \dfrac{1}{12n(n-1)} < 0$ (le dénominateur de la deuxième fraction est plus petit que celui de la première, donc l'inverse est plus grand, et la différence négative), ce qui prouve que $v_{n+1} - v_n < 0$, et donc que (v_n) est une suite décroissante.

   Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

5. (a) Sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^n(x) \leqslant \sin^{n+1}(x)$, encadrement qu'il suffit d'intégrer pour obtenir la décroissance de la suite (I_n).

   (b) On calcule $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x) \times \sin(x)\ dx$ à l'aide d'une IPP, en posant $u(x) = \sin^{n+1}(x)$, donc $u'(x) = (n+1)\sin^n(x)\cos(x)$, et $v'(x) = \sin(x)$ qu'on intègre en $v(x) = -\cos(x)$. Toutes les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration, et le produit uv s'annule aux deux bornes de l'intégrale, donc $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin^n(x)\cos^2(x)\ dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)(1-\sin^2(x))\ dx = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. On a donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, ou encore $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

   (c) En appliquant plusieurs fois de suite la relation de récurrence (avec une rédaction pas hyper rigoureuse), on calcule $I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n}I_{2n-2} = \dfrac{2n-1}{2n} \times \dfrac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4} = \cdots = \dfrac{(2n-1)\times(2n-3)\dots 3\times 1}{(2n)\times(2n-2)\cdots\times 2}I_0$. Or, $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx = \dfrac{\pi}{2}$, et la fraction en facteur de I_0 dans le résultat obtenu peut s'écrire, en multipliant en haut en en bas par tous les facteurs pairs manquant au numérateur, $\frac{(2n)!}{(2n)^2 \times (2n-2)^2 \times \cdots \times 2^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$, donc $I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$.

De même, $I_{2n+1} = \frac{(2n) \times (2n-1) \times \cdots \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3 \times 1} I_1 = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$, après avoir calculé $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

6. La double inégalité découle de la décroissante de la suite (I_n). On en déduit que $1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$, soit $1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{2n+1}{2n}$. Le majorant ayant pour limite 1, on en déduit que $I_{2n} \sim I_{2n+1}$, soit $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \sim \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$, ou encore $\pi \sim \frac{2 \times 2^{4n} \times (n!)^4}{(2n+1) \times ((2n)!)^2} \sim \frac{2^{4n}(n!)^4}{n \times ((2n)!)^2}$, ce qui prouve exactement le calcul de limite demandé.

7. Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite e^{u_n} convergera vers e^l, donc $\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n \times n!} \sim e^l$, ou encore $n! \sim \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n+l}}$. Dans ce cas, on aura $(2n)! \sim \frac{2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}}}{e^{2n+l}}$, puis $\frac{2^{4n}(n!)^4}{n \times (2n)!^2} \sim \frac{2^{4n} \times n^{4n+2} \times e^{4n+2l}}{n \times e^{4n+4l} \times 2^{4n+1} \times n^{4n+1}} \sim \frac{1}{2e^{2l}}$. Comme on a montré plus hqut que ce quotient avait pour limite π, on a donc $e^{2l} = \frac{1}{2\pi}$, soit $e^l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (et donc très accessoirement $l = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$, mais en fait on s'en fout un peu). Il ne reste plus qu'à remplacer pour obtenir l'équivalent souhaité : $n! \sim \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n+l}} \sim \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.