Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 9

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 12 mars 2025

Exercice : formule de Stirling.

Cet exercice visant à démontrer une formule classique donnant un équivalent étonnant de $n!$ est directement tiré d'un vieux sujet de concours.

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un segment $[a,b]$, telle que $f(a)=f(b)=0$, et $c\in]a,b[$. Montrer qu'il existe un réel $d\in]a,b[$ tel que $f(c)=\dfrac{f''(d)}{2}(c-a)(c-b)$. On pourra pour cela introduire la fonction $\varphi : x\mapsto f(x)-\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$.
2. Soit g une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que, $\forall x\in[a,b]$, $m\leqslant g''(x)\leqslant M$.
   (a) En appliquant le résultat précédent à la fonction $h : x\mapsto g(x)-g(a)\times\dfrac{x-b}{a-b}-g(b)\times\dfrac{x-a}{b-a}$, montrer que $\dfrac{M(x-a)(x-b)}{2}\leqslant g(x)-g(a)\times\dfrac{x-b}{a-b}-g(b)\times\dfrac{x-a}{b-a}\leqslant\dfrac{m(x-a)(x-b)}{2}$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_a^b g(a)\times\frac{x-b}{a-b}+g(b)\times\frac{x-a}{b-a}\,dx=\frac{(b-a)(g(a)+g(b))}{2}$.
   (c) En déduire que $\displaystyle -M\frac{(b-a)^3}{12}\leqslant\int_a^b g(x)\,dx-\frac{(b-a)(g(a)+g(b))}{2}\leqslant -m\frac{(b-a)^3}{12}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_n^{n+1}\ln(x)\,dx$, en déduire que $\displaystyle\frac{1}{12(n+1)^2}\leqslant\left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1)-\ln(n))-1\leqslant\frac{1}{12n^2}$.
4. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n=\ln(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n})-\ln(n!)$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{12(n-1)}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On notera l leur limite commune.
5. On note $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,dx$.
   (a) Justifier que (I_n) est une suite décroissante.
   (b) À l'aide d'une IPP, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
   (c) Calculer explicitement I_{2n} et I_{2n+1} pour tout entier n (un résultat faisant intervenir des factorielles et des puissances est attendu).
6. En exploitant la double inégalité $I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{n\times((2n)!)^2}=\pi$.
7. En déduire la valeur de l, puis un équivalent « simple » de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.