Devoir Maison n° 7

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 27 janvier 2025

Problème : autour des quaternions.

I. Le groupe des quaternions, vision matricielle.

On se place pour cette partie dans l'anneau de matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et on note exceptionnellement $\mathbf{1} = I_2$ la matrice identité (ce « 1 » qui n'est pas un nombre sera toujours noté en gras dans l'énoncé pour éviter les confusions, mais bien sûr vous aurez du mal à faire pareil sur vos copies), ainsi que $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ (qui n'est donc **pas** la matrice identité, attention aux notations inhabituelles pour les calculs), $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les produits matriciels suivants : I^2 , J^2 , K^2 , IJK , puis IJ , JI et JK .
2. Vérifier que l'ensemble à huit éléments $\mathbb{H}_8 = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, I, -I, J, -J, K, -K\}$ est un groupe multiplicatif, et donner son tableau de loi complet (sans détailler les derniers calculs de produits qui n'ont pas déjà été effectués à la question précédente). Ce groupe est-il commutatif ?
3. Donner la liste complète de tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$ (on a le droit d'utiliser le fait qu'un tel sous-groupe a nécessairement un nombre d'éléments qui est un diviseur du nombre total d'éléments de notre groupe).
4. On note désormais $\mathbb{H} = \{a\mathbf{1} + bI + cJ + dK \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$. Montrer que cet ensemble est un sous-groupe additif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et qu'il est stable par produit (un calcul bien bourrin suffira pour cette dernière vérification).

II. L'algèbre des quaternions.

L'ensemble $\mathbb{H}$ défini en fin de première partie est appelé algèbre des quaternions. On note désormais systématiquement, de façon très similaire à ce qu'on fait pour les nombres complexes, un quaternion sous la forme $q = a + bi + cj + dk$, en oubliant complètement l'origine matricielle de cette écriture, et en considérant que i , j et k sont trois nombres vérifiant $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ijk = -1$ (ainsi bien sûr que toutes les autres règles de calcul obtenues en partie I). Un quaternion sera identifié à un nombre réel si $b = c = d = 0$, et on appelle quaternion pur un nombre de la forme $q = bi + cj + dk$, avec donc $a = 0$.

1. Montrer que l'équation $q^2 = -1$ admet des solutions dans $\mathbb{H}$ autres que $\pm i$, $\pm j$ et $\pm k$.
2. Montrer que les réels commutent avec tous les autres quaternions, et que ce sont les seuls à avoir cette propriété.
3. On appelle **conjugué** du quaternion $q = a + bi + cj + dk$ le quaternion $a - bi - cj - dk$, qu'on notera $\bar{q}$ par analogie avec les nombres complexes.

Vérifier les propriétés élémentaires suivantes : $\bar{\bar{q}} = q$, $\overline{q + q'} = \bar{q} + \bar{q}'$, et $\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q}$.

4. Calculer, pour tout élément $q \in \mathbb{H}$, les produits $q \times \bar{q}$ et $\bar{q} \times q$. Vérifier en particulier que ces nombres sont toujours des réels positifs.

5. On note désormais $|q| = \sqrt{q\bar{q}}$ (là encore l'analogie avec $\mathbb{C}$ est flagrante, mais on parlera de **norme** d'un quaternion plutôt que de module). Montrer les propriétés élémentaires suivantes : $|\bar{q}| = |q|$, $|qq'| = |q| \times |q'|$.
6. Montrer que tout quaternion non nul possède un inverse, et donner une expression de q^{-1} faisant intervenir les notations introduites dans les questions précédentes.
7. Dédurre de la question précédente que $\mathbb{H}$ est en fait un corps (non commutatif).

III. Entiers d'Hamilton.

Un quaternion $q = a + bi + cj + dk$ est appelé entier d'Hamilton (William Rowan HAMILTON est un mathématicien irlandais ayant découvert les quaternions) si $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ **ou**

$\left(a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}, c - \frac{1}{2}, d - \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{Z}^4$. On notera $\mathbb{Z}_{\mathbb{H}}$ l'ensemble de tous les entiers d'Hamilton.

1. Montrer que $\mathbb{Z}_{\mathbb{H}}$ est un sous-anneau de $\mathbb{H}$.
2. Montrer que, $\forall q \in \mathbb{H}$, $|q| \in \mathbb{N}$.
3. Un entier de Hamilton est une **unité** de $\mathbb{H}$ si son inverse est également un élément de $\mathbb{Z}_{\mathbb{H}}$. Montrer que $q \in \mathbb{Z}_{\mathbb{H}}$ est une unité si et seulement si $|q| = 1$.
4. Donner la liste complète de toutes les unités de $\mathbb{H}$ (il y en a pas moins de 24).
5. (a) Soit q un quaternion quelconque, montrer qu'il existe $e \in \mathbb{Z}_{\mathbb{H}}$ tel que $|q - e|^2 \leq \frac{5}{8}$.
 (b) Soient e_1 et e_2 deux entiers de Hamilton, montrer qu'il existe un couple (q, r) d'entiers de Hamilton tels que $e_2 = qe_1 + r$, avec $|r| < |e_1|$. Ce résultat est l'équivalent sur les entiers de Hamilton de la division euclidienne sur les entiers « classiques ». Le couple (q, r) est-il toujours unique ?
6. Un entier de Hamilton e est **premier** si $e = u \times v$, avec $(u, v) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{H}}^2$ implique que u ou v est une unité de $\mathbb{H}$ (autrement dit, un nombre de Hamilton premier admet tout de même pas moins de 48 diviseurs : les 24 unités, et les 24 produits de e par ces unités).

Montrer que 2 n'est pas premier au sens précédent. Montrer que 3 non plus. En fait, montrez-le pour tous les entiers (au sens classique) compris entre 2 et 20.