Devoir Maison n° 6 : Devoir de Noël

MPSI Lycée Camille Jullian

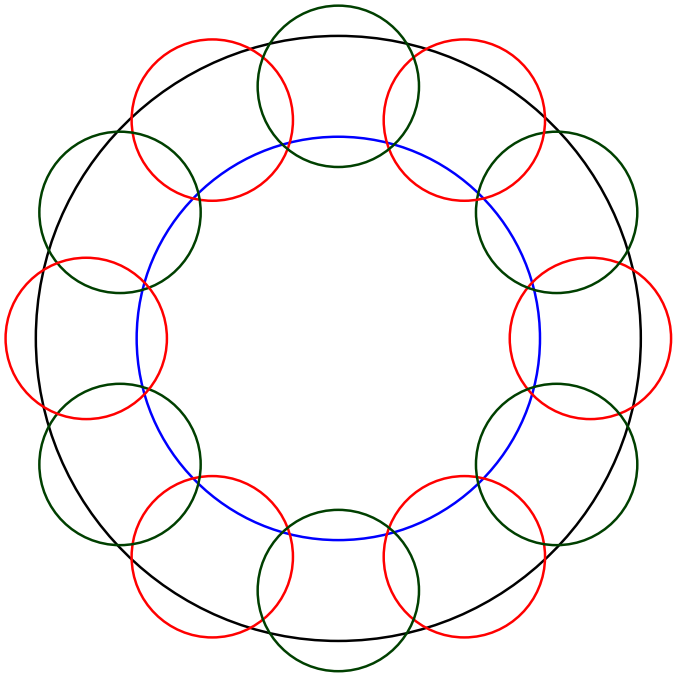
pour le 9 janvier 2025

Je sais bien que vous avez déjà tous reçu un cadeau de Noël ~~moisi~~ sublime lors du Secret Santa ~~foireusement~~ brillamment organisé dans la classe ces dernières semaines, mais un Noël sans maths, c'est un peu comme un devoir de M.Lafon sans courbe à tracer (ou un de ses cours sans blague pourrie ou allusion aux espaces vectoriels ?), il y manque clairement quelque chose. Voici donc, pour vous détendre un peu entre deux journées particulièrement stressantes de déballage de (vrais) cadeaux et d'enfournage frénétique de dinde aux marrons, quelques énoncés constituant un devoir totalement facultatif. J'avais prévu de vous préparer 42 énigmes, mais hélas, ma flemme légendaire a fait que le 2 s'est perdu en cours de route, vous en aurez donc seulement 4. Malgré le contexte un peu particulier des énoncés, il s'agit de vrais problèmes de maths qui pourraient même pour certains vous faire manipuler quelques concepts au programme de cette année de MPSI. Joyeux Noël à tous !

Le père ~~fouettard~~ Roupoil.

Énigme 1 : le repas de Noël.

Dans la famille Jémlémaths, le réveillon de Noël se déroule toujours autour d'une grande table ronde de 1.5 mètre de rayon. Au centre de la table, on dispose une nappe également ronde d'1 mètre de rayon. Et devant chacun des douze convives qui vont participer au réveillon, on a placé un set de table également rond, de rayon R inconnu (cf illustration ci-dessous). Quelle est la valeur minimale de R pour qu'aucun point de la table ne soit visible (ce qui n'est clairement **pas** le cas sur mon dessin) ?



Énigme 2 : les rennes du père Noël.

Tout le monde sait que le père Noël a huit rennes nommés Tornade, Danseur, Furie, Fringant, Comète, Cupidon, Tonnerre et Éclair. Ce qu'on sait moins, c'est que quatre d'entre eux sont des mâles (Tornade, Furie, Cupidon et Éclair), alors que les quatre autres (Danseur, Fringant, Comète et Tonnerre) sont des femelles (ndRoupoil : ça c'est du pipeau complet, c'est juste pour l'exercice). De plus, **six** rennes suffisent à tirer le traîneau du père Noël (deux à l'avant, deux au milieu, deux derrière), il peut donc en laisser deux au repos pour sa tournée. Combien d'attelages différents peut-il former (la position précise de chaque renne étant importante), si on impose une des conditions suivantes :

- aucune condition, tous les groupes de six rennes sont autorisés.
- on veut trois femelles et trois mâles dans l'ensemble de rennes choisis.
- on veut trois mâles et trois femelles, mais en plus on interdit de mettre côte à côte deux rennes du même sexe.
- on se fiche du nombre de mâles et de femelles, mais il est interdit de mettre côte à côte deux rennes ayant la même initiale.
- on combine les deux conditions précédentes (pas la même initiale et pas du même sexe pour les rennes voisins).

Vous avez aimé cette énigme ? Bonne nouvelle, vous allez adorer le chapître consacré au dénombrement !

Énigme 3 : les chats (peints) de Noël.

Bon, cette énigme-ci n'a aucun rapport avec Noël (à part le classique jeu de mots du titre), mais comme cette année les chats sont à l'honneur en MPSI, il fallait les faire figurer dans ce DM (en plus c'est un grand classique). Nos deux chats préférés, donc, jouent avec un élastique dont une extrémité est fixée sur un point du sol (cette extrémité-là ne bougera jamais), et qui fait initialement une longueur de dix mètres (ça va changer ensuite). Initialement, le chat gentil (ils n'ont toujours pas de nom...) est situé sur l'extrémité fixe de l'élastique, et le chat taquin est à l'autre extrémité. Le chat gentil veut rejoindre son copain et commence donc à marcher **sur l'élastique** à une vitesse constante d'un mètre par seconde. Mais toutes les secondes, le chat taquin tire sur l'élastique (qui a une élasticité infinie, c'est un problème de maths et pas de physique) pour l'allonger de dix mètres supplémentaires. Attention, quand l'élastique s'allonge, le chat gentil qui marche dessus change de position : ainsi, après la première seconde, le chat gentil avait parcouru un mètre, mais comme on double la longueur de l'élastique, il se retrouve en fait transporté d'un seul coup à **deux** mètres de son point de départ. Par contre, il s'était rapproché à neuf mètres de son pote et se retrouve donc maintenant à 18 mètres de lui, il a encore des efforts à fournir pour avoir une chance de le rattraper. D'ailleurs, la question est simple : finira-t-il par le rejoindre un jour ? Si oui, au bout de combien de temps (approximativement) ?

Énigme 4 : les cadeaux de Noël.

Dans la famille Jémlémaths (oui, encore eux !), comme dans beaucoup d'autres familles d'ailleurs, les enfants recoivent des cadeaux pour Noël. Mais comme les membres de cette famille sont un peu ~~tarés~~ obnubilés par les maths, le nombre de cadeaux reçus doit vérifier les critères suivants :

- un enfant qui fait sa liste de cadeaux tout seul dans son coin reçoit un nombre de cadeaux égal au nombre de diviseurs de son âge (ainsi, un enfant de 8 ans recevra 4 cadeaux puisque 8 est divisible par 1, 2, 4 et 8).
- deux enfants ou plus ont le droit de se regrouper pour faire une liste commune, auquel cas ils recevront à eux tous un nombre de cadeaux égal au nombre de diviseurs de la **somme** de leurs âges. Ainsi, deux enfants ayant respectivement 5 et 7 ans, qui recevraient deux cadeaux chacun s'ils faisaient une liste séparée (puisque 5 et 7 sont premiers) ont tout intérêt à faire une liste commune pour recevoir six cadeaux à se partager (puisque $5 + 7 = 12$ a pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6 et 12).

La famille Jémlémaths est très nombreuse, puisqu'il y a dix enfants (plus les deux parents, ça explique les douze sets de table de l'énigme 1), âgés de 1 à 10 ans (un enfant pour chaque âge possible). Comme les enfants en question sont évidemment très matheux, ils vont optimiser la répartition des listes de cadeaux de Noël pour recevoir au total le plus de cadeaux possible. Combien en auront-ils ? Et comment devront-ils s'organiser l'an prochain (où, à la surprise générale, ils auront tous vieilli d'un an !) ?