

Devoir Maison n° 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

19 décembre 2024

Problème : étude d'un ensemble de Julia.

I. Quelques généralités et cas particuliers.

1. On a donc imposé $z_0 = 1 + i$. Calculons les termes suivants : $z_1 = 1 + i + (1 + i)^2 = 1 + i + 1 + 2i - 1 = 1 + 3i$, puis $z_2 = 1 + 3i + (1 + 3i)^2 = 1 + 3i + 1 + 6i - 9 = -7 + 9i$, $z_3 = -7 + 9i + (-7 + 9i)^2 = -7 + 9i + 49 - 126i - 81 = -39 - 117i = -39(1 + 3i)$. Bon, il n'est peut-être pas utile d'aller beaucoup plus loin, il semble assez clair que le module de z_n va exploser et tendre vers $+\infty$, mais avec un signe des parties réelle et imaginaire de z_n qui semble varier d'un terme à l'autre.

Tentons maintenant avec $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, et calculons $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$, puis $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$, $z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = -\frac{3}{16}$. Cette fois-ci il semblerait bien que, une fois passé z_0 , tous les termes deviennent réels négatifs (c'est même facile à prouver, on va le faire un peu plus loin), et que la suite tende vers 0.

2. Si a est réel, une récurrence triviale montre que tous les termes de la suite resteront réels. Comme $z_{n+1} - z_n = z_n^2 \geq 0$, la suite sera toujours croissante. Toute la question est de savoir si elle va être majorée ou non, et pour cela, une petite étude de la fonction $f : x \mapsto x + x^2$ pourrait s'avérer utile. Il n'y a d'ailleurs pas grand chose à étudier, la fonction a pour dérivée $f'(x) = 1 + 2x$ et on obtient très facilement le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$+\infty$
			$\searrow$	0	$\nearrow$
			$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	

On a indiqué les images de -1 et de 0 car elles vont jouer un rôle dans la suite de la discussion. Distinguons trois cas :

- si $a > 0$, la suite étant croissante, tous les termes de la suite seront supérieurs ou égaux à a . En particulier, on aura toujours $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq a^2 > 0$. Cette minoration montre que $u_{n+1} - u_n$ ne peut pas tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc que la suite (u_n) ne peut pas converger (si une suite converge vers un réel l , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$). La suite n'est donc pas majorée, elle diverge nécessairement vers $+\infty$ dans ce cas.
- si $a < -1$, on aura $f(a) > 0$ d'après l'étude des variations de f , donc $u_1 > 0$, et on est alors ramenés au cas précédent (on peut oublier la valeur de u_0 qui n'influencera pas la nature de la suite), donc on a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ dans ce cas.

- si $a \in [-1, 0]$, $f(a) \in [-1, 0]$ d'après l'étude des variations de f , et une récurrence triviale montre alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1, 0]$. La suite est donc majorée par 0 et converge nécessairement. En notant l sa limite, on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + u_n^2 = l + l^2$, donc $l^2 = 0$, ce qui laisse comme unique possibilité $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- On vient de faire le calcul pour $f : z + z^2 = z$ est vérifié uniquement pour $z = 0$. Calculons ensuite $g(z) = f(z + z^2) = z + z^2 + (z + z^2)^2 = z + z^2 + z^2 + 2z^3 + z^4 = z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z$, donc $g(z) = z$ si $z^4 + 2z^3 + 2z^2 = 0$. Après factorisation par z^2 ($z = 0$ est donc point fixe de g comme de f), on obtient l'équation $z^2 + 2z + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$ et pour solutions $z_1 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$ et $z_2 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$. La fonction g a donc deux trois points fixes : 0, $-1 + i$ et $-1 - i$.
 - On cherche donc à résoudre l'équation $z + z^2 = z_0 + z_0^2$, soit $z - z_0 + z^2 - z_0^2 = 0$, donc $z - z_0 + (z - z_0)(z + z_0) = 0$, ou encore $(z - z_0)(1 + z + z_0) = 0$. L'équation est donc vérifiée si $z = z_0$ (on s'en doutait un peu) ou $z = -1 - z_0$, c'est-à-dire si z est symétrique dans le plan complexe de z_0 par rapport au point A qu'on va définir juste après (si ça ne vous paraît pas clair, réfléchissez-y mieux).
 - Un tout petit calcul astucieux permet de plier la question assez vite : $z_{n+1} + \frac{1}{2} = z_n^2 + z_n + \frac{1}{2} = \left(z_n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. Si z est l'affixe d'un point situé à une certaine distance r du point A , on peut écrire $z = -\frac{1}{2} + re^{i\theta}$, et on déduit alors que $z_{n+1} = r^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{4}$, ce qui prouve que z_{n+1} sera à une distance r^2 du point d'affixe $-\frac{1}{4}$ dans le plan complexe. Autrement dit, l'image du **cercle** centré en A et de rayon r est incluse dans le **cercle** centré en $-\frac{1}{4}$ et de rayon r^2 (en fait, elle est même égale à ce cercle, car il est facile de vérifier à l'aide du petit calcul précédent que tout point du cercle de rayon r^2 est atteint comme image d'un point du cercle de rayon r). Si cette propriété est vraie pour les cercles (quels que soient leur rayon), elle est aussi vraie pour les disques ouverts : le disque ouvert centré en A de rayon r est la réunion de tous les cercles centrés en A de rayon strictement inférieur à r , et aura donc pour image l'union des cercles centrés en $-\frac{1}{4}$ dont le rayon est le carré d'un réel strictement inférieur, ce qui recouvre tout le disque ouvert centré en $-\frac{1}{4}$ de rayon r^2 .

II. Étude de la convergence de la suite (z_n) .

- On l'a en fait déjà fait à la question 2 de la première partie, la seule limite possible est 0 (seul point fixe de la fonction f).
- (a) La sous-suite (z_{2n}) vérifie la relation de récurrence $z_{2n+2} = f(z_{2n+1}) = g(z_{2n})$. Si elle converge vers une limite l , un simple passage à la limite implique alors que $l = g(l)$, et donc que $l = 0$, $l = -1 - i$ ou $l = -1 + i$ en reprenant les calculs de la question I.3.
 (b) La fonction f étant continue, si (z_{2n}) converge vers l , alors $(z_{2n+1}) = (f(z_{2n}))$ converge vers $f(l)$. Autrement dit, si z_{2n} converge vers 0, alors z_{2n+1} converge aussi vers 0 (et toute la suite (z_n) converge donc vers 0 dans ce cas). Si (z_{2n}) converge vers $-1 - i$, alors (z_{2n+1}) converge vers $f(-1 - i) = -1 - i + (-1 - i)^2 = -1 - i + 1 + 2i - 1 = -1 + i$ (bien sûr, cette limite est aussi un point fixe de la fonction g puisque (z_{2n+1}) vérifie la même relation de récurrence que (z_{2n})). Enfin, si (z_{2n}) converge vers $-1 + i$, alors (z_{2n+1}) converge vers $f(-1 + i) = -1 + i + (-1 + i)^2 = -1 + i + 1 - 2i - 1 = -1 - i$.
- (a) On a donc posé $z_n = x_n + iy_n$, et on peut alors calculer $z_{n+1} = z_n + z_n^2 = x_n + iy_n + x_n^2 + 2ix_ny_n - y_n^2$, donc $x_{n+1} = x_n + x_n^2 - y_n^2$, et $y_{n+1} = y_n(1 + 2x_n)$. Si on suppose que (x_n)

converge vers une limite l_x et $(|y_n|)$ vers une limite l_y , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n^2 = l_y^2$ (le carré de y_n et celui de $|y_n|$ étant toujours égaux), donc un passage à la limite donne $l_x = l_x + l_x^2 - l_y^2$, soit $l_y = \pm l_x$. De plus, un deuxième passage à la limite dans la relation $|y_{n+1}| = |y_n| \times |1 + 2x_n|$ donne $l_y = l_y \times |1 + 2l_x|$. Les seules possibilités pour que cette égalité soit vérifiée sont $l_y = 0$ (et dans ce cas la première relation obtenue donne aussi $l_x = 0$), ou $1 + 2l_x = \pm 1$, donc $l_x = 0$ (mais on revient alors au cas précédent) ou $l_x = -1$, qui implique cette fois-ci $l_y = 1$ (la limite l_y ne peut pas être négative puisqu'elle la limite d'une suite toujours positive).

- (b) Dans le cas où $l_x = l_y = 0$, la suite z_n tend vers 0 (et toutes ses sous-suites également). Si par contre $l_x = -1$ et $l_y = 1$, la suite (y_n) peut très bien ne pas converger (seule sa valeur absolue est supposée avoir une limite), et (z_n) ne convergera alors pas non plus. Mais puisqu'on sait que (x_n) a pour limite -1 , on peut affirmer que $1 + 2x_n$ (qui tend aussi vers -1) sera strictement négatif, au moins à partir d'un certain rang n_0 . À partir de ce rang, on aura donc y_n et y_{n+1} de signe opposé, et donc tous les termes d'indice pair supérieur à n_0 de la suite (y_n) auront le même signe (et de même pour les termes d'indice impair). Supposons par exemple que ces termes d'indice pair soient positif, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{2n} = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_{2n} = -1 + i$ (et dans ce cas, comme on l'a vu plus haut, $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_{2n+1} = -1 - i$, ce qui est cohérent avec le fait que les termes d'indice impair de (y_n) seront négatifs et convergeront donc vers -1). Le cas où les termes d'indice pair sont négatifs est complètement symétrique, on échange juste les deux limites.
4. (a) La relation de récurrence définissant la suite (z_n) peut s'écrire $z_{n+1} = z_n(1 + z_n)$, donc elle implique $|z_{n+1}| = |z_n| \times |1 + z_n|$, ou encore $|1 + z_n| = \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$ (si jamais le module de z_n est nul pour un certain entier n , il le restera ensuite puisque la suite stationne alors à 0, et dans ce cas la question est triviale). Si on suppose que $(|z_n|)$ converge vers l , un passage à la limite donne donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |1 + z_n| = \frac{l}{l} = 1$. Ah, et si jamais la **limite** des modules est nulle, sans que z_n ne s'annule ? Dans ce cas, cela signifie nécessairement que la suite (z_n) (et pas seulement son module) converge vers 0, et donc que $1 + z_n$ converge vers 1, ce qui rend à nouveau la conclusion triviale.
- (b) En élevant au carré, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |1 + z_n|^2 = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + x_n)^2 + y_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 2x_n + x_n^2 + y_n^2 = 1$. Or on sait déjà que $x_n^2 + y_n^2 = |z_n|^2$ converge, donc on en déduit que $2x_n$ converge nécessairement (vers une limite opposée à celle de $|z_n|^2$). Or, si (x_n) converge, alors (x_n^2) converge aussi, donc $y_n^2 = |z_n|^2 - x_n^2$ est une différence de deux suites convergentes, donc converge aussi. Sa racine carrée $|y_n|$ est donc également le terme général d'une suite convergente.
- (c) On reprend les résultats de la question 3 puisqu'on sait désormais que ses hypothèses en sont vérifiées. Soit (z_n) tend vers 0, et bien sûr $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$ dans ce cas. Soit (z_{2n}) et (z_{2n+1}) convergent vers $-1 \pm i$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = |-1 \pm i| = \sqrt{2}$.
5. (a) On rappelle que $z_{n+1} + \frac{1}{4} = \left(z_n + \frac{1}{2}\right)^2$ (cf dernière question de la partie I), donc $\left|z_{n+1} + \frac{1}{4}\right| = \left|z_n + \frac{1}{2}\right|^2$. Avec l'hypothèse faite, le module de gauche converge donc, vers une limite qui est le carré de celle supposée existante pour $\left|z_n + \frac{1}{2}\right|$.
- (b) En élevant au carré avant de développer les modules, on sait que les suites de terme général $\left(\frac{1}{2} + x_n\right)^2 + y_n^2 = \frac{1}{4} + x_n + x_n^2 + y_n^2$, et de terme général $\left(\frac{1}{4} + x_n\right)^2 + y_n^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}x_n + x_n^2 + y_n^2$ convergent toutes les deux. Leur différence $\frac{1}{2}x_n + \frac{3}{16}$ converge donc, ce qui prouve la

convergence de la suite (x_n) . Une fois que (x_n) converge, $\frac{1}{4} + x_n + x_n^2$ converge, donc (y_n^2) également, et $(|y_n|)$ aussi.

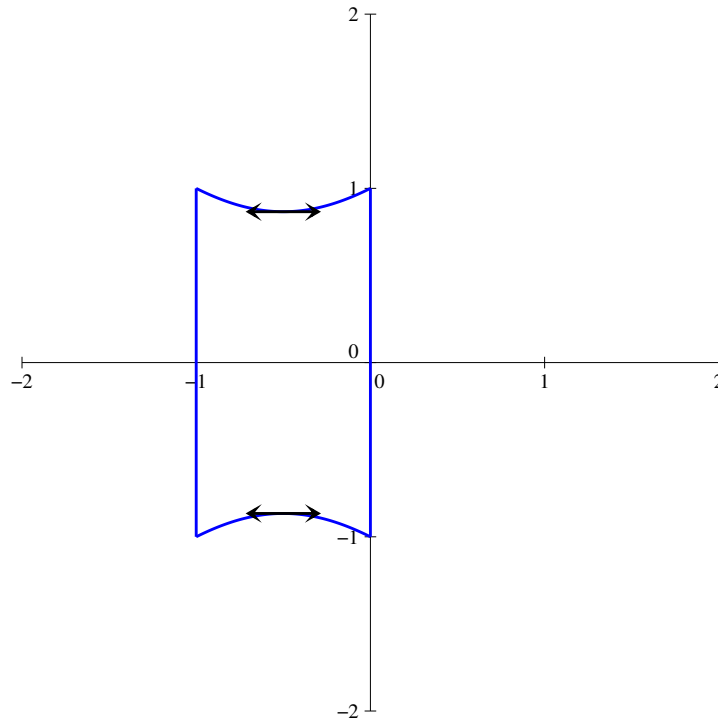
- (c) On a toujours les deux mêmes possibilités : (z_n) tend vers 0 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| z_n + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$, ou bien (z_{2n}) et (z_{2n+1}) tendent vers $-1 \pm i$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| z_n + \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2} \pm i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

III. Ensemble de Julia.

- La condition $-1 < x < 0$ ne va pas poser trop de problème, mais celle sur l'ordonnée des points de Δ est un peu plus compliquée. Comme $x^2 + x + 1$ est toujours positif (le discriminant de ce trinôme est strictement négatif), on peut l'écrire sous forme d'encadrement : $-\sqrt{x^2 + x + 1} < y < \sqrt{x^2 + x + 1}$. Posons donc $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, et étudions la fonction h sur $[-1, 0]$ (on peut le faire sur $\mathbb{R}$ mais ça ne sert à rien avec les conditions imposées sur x). La fonction est dérivable, et $h'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$. Le signe de cette dérivée est celui de $2x + 1$, donc h est croissante sur $[-\frac{1}{2}, 0]$ et décroissante sur $[-1, -\frac{1}{2}]$. On calcule $h(0) = 1$, $h(-1) = 1$ et $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et on peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0
h	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

On en déduit l'allure de l'ensemble Δ (il s'agit de la zone comprise entre les délimitations bleues, y devant être compris entre les courbes de h et de $-h$:



- Je suis bien obligé d'avouer que je cherche toujours à l'heure actuelle un moyen **vraiment simple** de répondre à cette question. Le résultat en est indiscutablement vrai, mais peu

évident à démontrer (en particulier, des calculs directs fonctionnent mal). En attendant de trouver éventuellement mieux, je vous propose une solution exploitant un peu de topologie déguisée. L'ensemble Δ , ou plutôt son adhérence $\overline{\Delta}$, obtenue à la question précédente est un ensemble convexe centré sur le point d'affixe $-\frac{1}{2}$, et peut en particulier être vu comme une union de segments centrés en $-\frac{1}{2}$. Le calcul effectué en question I.5 montre que chacun de ces segments aura une image par f qui sera un segment centré en $-\frac{1}{4}$. Le fait de calculer $1+f(z)$ plutôt que $f(z)$ ne change pas grand chose, l'image de chacun de nos segments sera un segment dans le plan complexe (centré en $\frac{3}{4}$ après l'ajout de 1), et le module maximum atteint sur un tel segment l'est forcément en une extrémité du segment, qui correspond elle-même à une des deux extrémités du segment initial inclus dans Δ . Tout ça pour justifier le fait que la valeur maximale du module $|1+f(x)|$ sur $\overline{\Delta}$ sera nécessairement atteinte en un point situé au bord de cet ensemble (notez en passant que ledit maximum est un vrai maximum et pas une borne supérieure, c'est une sorte d'équivalent en deux dimensions du théorème du maximum qu'on a vu en cours dans le chapitre sur la continuité). Reste à étudier ce qui se passe sur le bord de Δ :

- à gauche, lorsque $x = -1$, on a $f(z) = |1+z+z^2| = |1-1+iy+(-1+iy)^2| = |iy+1-2iy-y^2| = |1-y^2-iy| = \sqrt{(1-y^2)^2+y^2} = \sqrt{1-y^2+y^4} \leq 1$ puisque $y \in [-1,1]$ sur $\overline{\Delta}$, donc $y^2 \geq y^4$.
- à droite, lorsque $x = 0$, on a $f(z) = |1+z+z^2| = |1+iy+(iy)^2| = |1-y^2+iy|$, la fin du calcul est la même que ci-dessus.
- enfin, quand on est « en haut ou en bas », donc quand $y^2+1+x+x^2$, on calcule directement $|1+z+z^2|^2 = |1+x+iy+x^2-y^2+2ixy|^2 = |iy(1+2x)|^2 = y^2(1+2x)^2$. Or $y^2 \leq 1$ et $1+2x \leq 1$ sur notre domaine, donc on a une fois de plus un module inférieur ou égal à 1.

Finalement, on constate que le maximum de $|1+z+z^2|$ atteint au bord de $\overline{\Delta}$ est inférieur ou égal à 1, ce qui prouve que ce même module est **strictement** inférieur à 1 à l'intérieur de Δ (puisque le maximum n'est jamais atteint ailleurs qu'au bord).

3. En reprenant le calcul effectué en fin de question précédente, $f(z) = x+x^2-y^2+iy(1+2x)$. Or, $x+x^2-y^2 > -1$ par hypothèse si $z \in \Delta$, et $x+x^2 = x(1+x) < 0$ si $x \in]-1,0[$, ce qui prouve que $x+x^2-y^2 \leq 0$. La partie réelle de $f(z)$ vérifie donc bien l'encadrement souhaité. C'est nettement moins évident pour la partie imaginaire, puisqu'il faut vérifier que $y^2(1+2x)^2 < 1+x+x^2-y^2+(x+x^2-y^2)^2$, ce qui a l'air moyennement sympathique. ON va un peu tricher une fois de plus en ne vérifiant l'inégalité **large** qu'au **bord** de $\overline{\Delta}$, ce qui suffit à prouver l'inégalité stricte à l'intérieur de Δ pour les mêmes raisons qu'à la question précédente (la valeur maximale de $|y|$ est atteinte au bord de Δ). On distingue à nouveau les trois cas, en notant $X = x+x^2$ et $Y = y(1+2x)$ les parties réelle et imaginaire de $f(z)$:

- si $x = -1$, $X = 0$, donc $1+X+X^2 = 1$ et $Y^2 = y^2 \leq 1$, donc tout va bien.
- si $x = 0$, $X = 0$ à nouveau et $Y^2 = y^2$, cas identique au précédent.
- si $y = \pm h(x)$, alors $X = x+x^2-y^2 = -1$, donc $1+X+X^2 = 1$, et $Y^2 = y^2(1+2x)^2 \leq y^2$ (puisque $1+2x \in [-1,1]$), donc l'inégalité est à nouveau vérifiée.

On a donc bien $f(\overline{\Delta}) \subset \overline{\Delta}$, et donc $f(\Delta) \subset \Delta$. La deuxième inclusion demandée dans cette question est exactement celle démontrée à la question précédente, puisqu'elle revient à dire que la distance entre $f(z)$ et -1 , autrement dit $|f(z)+1|$, est strictement inférieure à 1 quand z parcourt Δ .

4. On a déjà signalé plus $|z_{n+1}| = |z_n| \times |1+z_n|$. Or, par une récurrence évidente exploitant la question précédente, si $a \in \Delta$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \in \Delta$, donc $|1+z_n| = |1+f(z_{n-1})| < 1$, et $|z_{n+1}| < |z_n|$. La suite des modules est donc strictement décroissante, et nécessairement convergente (puisque minorée par 0). Elle ne peut certainement pas tendre vers $\sqrt{2}$ puisque

$a \in \Delta$ et donc $|a| < \sqrt{2}$ (les points les plus éloignés de l'origine dans l'ensemble $\overline{\Delta}$ sont les points d'affixe $-1 \pm i$ qui ont justement pour module $\sqrt{2}$). La question II.4 montre alors que le module de z_n converge vers 0, et donc que la suite (z_n) elle-même converge (vers 0). Autrement dit, $a \in \Omega$ et $\Delta \subset \Omega$.

5. Supposons que a n'appartienne **pas** au disque centré en $-\frac{1}{2}$ et de rayon $\sqrt{2}$, alors le calcul de la question I.5 montre que $f(a)$ est situé à une distance de $-\frac{1}{4}$ au moins égale à 2, et donc à une distance de $-\frac{1}{2}$ au moins égale à $2 - \frac{1}{4} > \sqrt{2}$ (par inégalité triangulaire). Autrement dit, en notant E l'ensemble $\mathbb{C} \setminus D\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$, on aura, $\forall a \in E$, $f(a) \in E$. Par récurrence évidente, si $a \in E$, tous les termes de la suite (z_n) appartiendront à E . En particulier, la suite (z_n) ne risque pas de tendre vers 0, et ne convergera donc pas. On vient de prouver par une sorte de contraposée que $\Omega \subset D\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ (on peut faire mieux en se battant un peu plus, mais ça n'a pas vraiment d'intérêt).
6. Supposons que $a \notin \Delta$ mais $f(a) \in \Delta$. Alors, de façon évidente, $a \in \Omega$ puisque $f(a) \in \Omega$ (la suite issue de a et celle issue de $f(a)$ sont les mêmes à un simple décalage d'indice près). Autrement dit, l'ensemble $f^{-1}(\Delta)$ des antécédents des éléments de Δ est inclus dans Ω . Or, cet ensemble inclut nécessairement Δ puisque $f(\Delta) \subset \Delta$. De même, les antécédents de ces antécédents (ce qu'on pourrait noter $f^{-2}(\Delta)$) forment un sous-ensemble de Ω qui inclut $f^{-1}(\Delta)$. On peut généraliser à un ensemble logique noté $f^{-n}(\Delta)$, constitué de tous les nombres complexes z pour lesquels $f^n(z) \in \Delta$.
Symétriquement, les ensembles $f^{-n}(E)$, où E est l'ensemble défini à la question précédente, sont tous constitués de nombres z n'appartenant pas à Ω (puisque'ils engendrent une suite (z_n) dont un élément finira par appartenir à E , et ne pouvant donc pas converger), et ces ensembles sont « de plus en plus gros ». On peut en fait prouver que les ensembles $f^{-n}(\Delta)$ et $f^{-n}(E)$ forment une sorte d'approximation « par l'intérieur » et « par l'extérieur » de l'ensemble Ω , qui « converge vers Ω » quand n tend vers $+\infty$.
7. On n'obtient pas facilement sur le web de représentations de cet ensemble de Julia précis (ou alors j'ai mal cherché), mais on trouve aisément de très belle représentations d'autres ensemble qui lui sont reliés (notamment le célèbre ensemble de Mandelbrot).