Devoir Maison n° 5

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 19 décembre 2024

Ce sujet est très voisin du problème du DS4 sur lequel vos camarades de l'an dernier ont eu le plaisir de plancher. Bien sûr, le but est de faire ce DM par vous-même, sans chercher à vous inspirer de manière trop voyante du corrigé dudit DS (de toute façon, les questions sont volontairement différentes même si l'objet d'étude est le même).

Problème : étude d'un ensemble de Julia.

Dans tout le problème on note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+z^2 \end{array} \right.$, et on note $g = f \circ f$. Pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$, on va s'intéresser à la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = f(z_n) = z_n + z_n^2$.

I. Quelques généralités et cas particuliers.

1. Calculer les premiers termes de la suite (z_n) lorsque $a = 1+i$, puis lorsque $a = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ (le nombre de termes à calculer est laissé à votre appréciation). Que peut-on conjecturer sur la nature de ces deux suites (on s'intéressera en particulier à l'évolution du module de z_n dans ces deux cas particuliers) ?
2. Étudier la suite (z_n) dans le cas où a est un **réel**. On s'intéressera en particulier à la monotonie et à la limite de la suite dans ce cas (on pourra bien sûr distinguer des cas selon la valeur de a).
3. Déterminer les points fixes de la fonction f (donc les nombres complexes z vérifiant $f(z) = z$), ainsi que ceux de la fonction g.
4. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $f(z) = f(z_0)$.
5. Pour tout réel $r > 0$, déterminer l'image par f est par g du disque ouvert centré en $A\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon r.

II. Étude de la convergence de la suite (z_n).

1. En supposant que la suite (z_n) converge, déterminer sa limite.
2. On suppose dans cette question que la sous-suite (z_{2n}) converge.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?
   (b) Montrer que (z_{2n+1}) converge également, et préciser la valeur de sa limite en fonction de celle de (z_{2n}).
3. On note désormais x_n et y_n les parties réelle et imaginaire de z_n. On suppose dans un premier temps que (x_n) et $(|y_n|)$ convergent.
   (a) Quelles sont les limites possibles de ces deux suites ?
   (b) Démontrer que (z_{2n}) et (z_{2n+1}) sont alors convergentes.

4. On suppose dans cette question que $(|z_n|)$ converge.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |1+z_n| = 1$.
   (b) En déduire que (x_n) et $(|y_n|)$ convergent.
   (c) En déduire les valeurs possibles de la limite de $|z_n|$.
5. On suppose cette fois-ci que $\left(\left|z_n + \dfrac{1}{2}\right|\right)$ converge.
   (a) Déterminer la nature de $\left(\left|z_n + \dfrac{1}{4}\right|\right)$.
   (b) En déduire la nature des suites (x_n) et $(|y_n|)$.
   (c) En déduire les valeurs possibles pour $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|z_n + \dfrac{1}{2}\right|$.

III. Ensemble de Julia.

On note Ω l'ensemble des nombres complexes a pour lesquels la suite (z_n) converge. C'est cet ensemble qui est classiquement nommé ensemble de Julia (il s'agit d'un exemple connu d'ensemble fractal dans le plan complexe). On notera également $\Delta = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid -1 < x < 0 \text{ et } y^2 < x^2 + x + 1\}$.

1. Représenter dans le plan complexe l'ensemble Ω (une petite étude de fonction préliminaire pourrait s'avérer utile).
2. Montrer que, si $z \in \Delta$, $|1 + f(z)| < 1$.
3. Montrer que $f(\Delta) \subset \Delta$, puis que $f(\Delta) \subset D$, où D est le disque de centre $B(-1)$ et de rayon 1.
4. En déduire que, si $a \in \Delta$, la suite $(|z_n|)$ est strictement décroissante, puis que $\Delta \subset \Omega$.
5. Montrer que Ω est inclus dans un disque dont on précisera le centre et le rayon (on essaiera quand même de trouver un disque « le plus petit possible »).
6. Expliquer comment, en calculant les antécédents des éléments des disques construits dans les questions précédentes, on peut obtenir une représentation approchée de plus en plus précise de l'ensemble Ω.
7. Admirer sur Internet de belles représentations colorées de l'ensemble de Julia.