

Devoir Maison n° 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

28 novembre 2024

Exercice 1

1. On va bien sûr commencer par effectuer une décomposition en éléments simples de la fraction dans la somme. Le dénominateur peut s'écrire sous la forme $k(k^2 + 4k + 3)$, le deuxième facteur ayant pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $k_1 = \frac{-4+2}{2} = -1$ et $k_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$. Autrement dit, il peut s'écrire $k(k+1)(k+3)$, et on aura donc une décomposition de la forme $\frac{2k-3}{k(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+3}$, où a , b et c sont trois constantes réelles. On les calcule par la méthode habituelle : produit par k puis $k = 0$ pour obtenir $a = -1$, produit par $k+1$ puis $k = -1$ pour obtenir $b = \frac{5}{2}$, et produit par $k+3$ puis $k = -3$ pour obtenir $c = \frac{3}{2}$.

On va ensuite procéder à un classique télescopage : $S_n = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{5}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} =$
$$-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{5}{2} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{3}{2} \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\sum_{k=4}^n \frac{1}{k} \right) + \frac{5}{4} + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{2} \sum_{k=4}^n \frac{1}{k} \right) + \frac{5}{2(n+1)} -$$
$$\left(\frac{3}{2} \sum_{k=4}^n \frac{1}{k} \right) - \frac{3}{2(n+1)} - \frac{3}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}.$$

2. On va donc démontrer par récurrence la propriété $P_n : S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}$.
Pour $n = 0$, la somme est vide, et le membre de droite vaut $\frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 0$, donc P_0 est vérifiée (on peut bien sûr initialiser pour $n = 1$ si on trouve ça plus naturel). Supposons la propriété vraie au rang n , alors $S_{n+1} = S_n + \frac{2(n+1)-3}{(n+1)^2 + 4(n+1) + 3}$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour remplacer S_n par sa valeur, mais surtout décaler la décomposition en éléments simples effectuée plus haut (formule valable pour tout entier) au rang $n+1$ pour écrire $\frac{2(n+1)-3}{(n+1)^2 + 4(n+1) + 3} = -\frac{1}{n+1} + \frac{5}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+4)}$, ce qui évitera des mises au même dénominateur très laborieuses. On en déduit donc que $S_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)} - \frac{1}{n+1} + \frac{5}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+4)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2(n+3)} - \frac{3}{2(n+4)}$, ce qui est exactement l'énoncé de la propriété P_{n+1} . On a donc prouvé l'hérédité de notre récurrence, et la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 2

1. On peut calculer (c'est une somme géométrique) $\sum_{i=0}^n t^{8i+k} = t^k \times \sum_{i=0}^n (t^8)^i = \frac{t^k(1-t^{8(n+1)})}{1-t^8}$,

donc le membre de gauche de l'inégalité demandée est simplement égal à $\frac{t^{8(n+1)+k}}{1-t^8}$ (tout étant positif, on peut se dispenser de la valeur absolue). Puisqu'on a supposé $0 < t \leq a < 1$, on aura certainement au numérateur $t^{8(n+1)+k} \leq a^{8(n+1)+k}$. De plus, au dénominateur, $0 < 1 - a^8 \leq 1 - t^8$ donc par passage à l'inverse $\frac{1}{1-t^8} \leq \frac{1}{1-a^8}$. On peut combiner les deux majorations pour obtenir celle de l'énoncé.

2. Commençons par calculer $\int_0^a \sum_{i=0}^n t^{8i+k} = \sum_{i=0}^n \int_0^a t^{8i+k} = \sum_{i=0}^n \left[\frac{t^{8i+k+1}}{8i+k+1} \right]_0^a = \frac{a^{8i+k+1}}{8i+k+1}$.

Bon, il y a manifestement une incohérence au niveau des indices utilisés dans l'énoncé, on va donc utiliser des n à la place des i et des p à partir des n à partir de maintenant. Le

calcul précédent montre que $\left| \int_0^a \frac{t^k}{1-t^8} dt - \sum_{n=0}^p \frac{a^{8n+k+1}}{8n+k+1} \right| = \left| \int_0^a \frac{t^k}{1-t^8} - \sum_{n=0}^p t^{8n+k} \right| \leq$

$\int_0^a \left| \frac{t^k}{1-t^8} - \sum_{n=0}^p t^{8n+k} \right| \leq \int_0^a \frac{a^{8(p+1)+k}}{1-a^8} dt = \frac{a^{8(p+1)+k+1}}{1-a^8}$ (on intègre simplement une constante

dans la dernière étape!). La majoration obtenue a une limite nulle quand on fait tendre p vers $+\infty$ (a étant une constante fixée inférieure à 1), ce qui prouve la limite demandée (la valeur absolue tout à gauche de notre calcul a une limite nulle, donc ce qui est à l'intérieur tend vers 0).

3. Posons donc $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, qui est bien compris entre 0 et 1 : comme $\sqrt{2}^8 = 2^4 = 16$, $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^k}{1-t^8} dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p \frac{1}{16^n (\sqrt{2})^{k+1} (8n+k+1)}$. Effectuons maintenant le changement de variable $x = \sqrt{2}t$

dans l'intégrale, qui est donc égale (détails des calculs assez évidents ici) à $\int_0^1 \frac{(\frac{x}{\sqrt{2}})^k}{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^8} \times$

$\frac{1}{\sqrt{2}} dx = 16 \int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{2})^{k+1}} \times \frac{x^k}{16-x^8} dx$. En simplifiant les facteurs $(\sqrt{2})^{k+1}$, on a donc

$16 \int_0^1 \frac{x^k}{16-x^8} dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p \frac{1}{16^n (8n+k+1)}$. Par exemple, pour $k=0$, on obtient $16 \int_0^1 \frac{1}{16-x^8} dx =$

$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p \frac{1}{16^n (8n+1)}$. De même, $16 \int_0^1 \frac{x}{16-x^8} dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p \frac{1}{16^n (8n+2)}$, et ainsi de suite. En combinant les formules pour $k=0$, $k=3$, $k=4$ et $k=5$, la formule de l'énoncé devient triviale.

4. On peut déjà factoriser facilement sous la forme $16-x^8 = 4^2 - (x^4)^2 = (4-x^4)(4+x^4) = (2-x^2)(2+x^2)(4+x^4) = (\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)(2+x^2)(4+x^4)$. Le seul facteur peu évident à découper davantage est le dernier, qui n'admet pas de racines réelles. Certes, mais on peut quand même écrire que $x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2 - (2x)^2 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. Finalement, $16-x^8 = (\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)(2+x^2)(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. On ne fera pas mieux pour le numérateur (tous les facteurs de degré 2 restants ont un discriminant strictement négatif).

Puisqu'on nous a gentiment guidés pour le numérateur, regardons quels facteurs du dénominateur peuvent aussi diviser $x^5+x^4+2x^3-4$, mais avant cela, constatons quand même que 1 est racine évidente de ce polynôme, qu'on peut donc factoriser sous la forme $(x-1)(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = ax^5+(b-a)x^4+(c-b)x^3+(d-c)x^2+(e-d)x+e$. Une identification donne $a=1$,

$b = 2, c = 4, d = 4$ et $e = 4$, donc $x^5 + x^4 + 2x^3 - 4 = (x-1)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 4)$. Le nombre $\sqrt{2}$ n'a aucune chance d'être racine du deuxième facteur, et $-\sqrt{2}$ ne l'est pas non plus (les puissances impaires donnent des $\sqrt{2}$ qui ne se simplifient jamais), on oublie donc les deux facteurs de degré 1 de notre dénominateur. Comme il n'y a guère de façon de deviner quels facteurs vont fonctionner parmi les trois restants, on va les tester l'un après l'autre : essayons une factorisation sous la forme $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = (x^2 + 2)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + (2a + c)x^2 + 2bx + 2c$. Une identification donne $a = 1, b = 2, 2a + c = 4$ donc $c = 2, 2b = 4$ qui est cohérent avec le $b = 2$ déjà obtenu, et enfin à nouveau $c = 2$. Miracle, ça marche, et les **deux** facteurs obtenus vont se simplifier avec le dénominateur : $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = (x^2 + 2)(x^2 + 2x + 2)$, donc finalement $\frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 4}{16 - x^8} = \frac{x - 1}{(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)(x^2 - 2x + 2)}$.

5. D'après ce qui précède, on peut effectuer une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{16(x-1)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-2x+2)} = \frac{a}{x-\sqrt{2}} + \frac{b}{x+\sqrt{2}} + \frac{cx+d}{x^2-2x+2}, \text{ avec } a, b, c \text{ et } d \text{ quatre réels à déterminer. On multiplie par } x-\sqrt{2} \text{ puis on pose } x = \sqrt{2} \text{ pour trouver } a = \frac{16(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(4-2\sqrt{2})} =$$

$$\frac{4(2-\sqrt{2})}{4-2\sqrt{2}} = 2. \text{ De même, en multipliant par } x + \sqrt{2} \text{ puis en posant } x = -\sqrt{2}, \text{ on trouve}$$

$$b = \frac{16(-\sqrt{2}-1)}{-2\sqrt{2}(4+2\sqrt{2})} = \frac{4(2+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}} = 2. \text{ Ensuite, on peut calculer la valeur de la fraction en}$$

0 : avec les valeurs de a et b déjà calculées, $\frac{-16}{-4} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} + \frac{d}{2}$, donc $d = 8$. Enfin, on peut multiplier l'égalité par x avant de calculer la limite en $+\infty$ pour obtenir $0 = 2 + 2 + c$, donc

$$c = -4. \text{ Finalement, } \frac{16(x-1)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-2x+2)} = \frac{2}{x-\sqrt{2}} + \frac{2}{x+\sqrt{2}} - \frac{4x-8}{x^2-2x+2}. \text{ On}$$

note en passant que $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$, ce qui va nous servir pour terminer l'exercice.

Reste à calculer $\int_0^1 \frac{2}{x-\sqrt{2}} + \frac{2}{x+\sqrt{2}} - \frac{4x-4}{x^2-2x+2} + \frac{4}{(x-1)^2+1} dx = [2\ln(\sqrt{2}-x) + 2\ln(x+\sqrt{2}) - 2\ln(x^2-2x+2) + 4\arctan(x-1)]_0^1 = 2\ln(\sqrt{2}-1) + 2\ln(\sqrt{2}+1) + 4\arctan(0) - 2\ln(\sqrt{2}) - 2\ln(\sqrt{2}) + 2\ln(2) - 4\arctan(-1) = 2\ln((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)) - 2\ln(2) + 2\ln(2) + \pi = 2\ln(2-1) + \pi = \pi$. Ce calcul, combiné avec le résultat de la question 3, prouve bien la formule annoncée dans le préambule de l'énoncé.