

Devoir Maison n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 28 novembre 2024

Un court DM parce qu'on a des DS rapprochés en ce beau mois de novembre, mais quand même quelques beaux calculs en perspective.

Exercice 1

On pose pour cet exercice $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-3}{k^3+4k^2+3k}$.

1. Calculer S_n en fonction de n .
2. Redémontrer la formule obtenue par récurrence.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer une formule due à Simon Plouffe (oui, c'est vraiment son nom), et permettant de calculer efficacement les décimales de π ... en base 2. Elle date de 1995 et a été à l'origine de pas mal de variantes plus ou moins abominables (les plus curieux iront jeter un coup d'oeil à l'article Wikipedia **Formule BBP**). Voici donc la formule en question :

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

Bien sûr, puisqu'on n'a pas encore vu les séries en cours ensemble, les sommes infinies seront remplacées en cours d'exercice par des limites.

1. On fixe un entier $k \in \mathbb{N}$ et un réel $a \in]0, 1[$. Montrer que, $\forall t \in [0, a]$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\left| \frac{t^k}{1-t^8} - \sum_{i=0}^n t^{8i+k} \right| \leq \frac{a^{8(n+1)+k}}{1-a^8}.$$
2. En déduire que $\int_0^a \frac{t^k}{1-t^8} dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p \frac{a^{8n+k+1}}{8n+k+1}$ (on pourra utiliser ici le fait qu'une valeur absolue d'intégrale est toujours inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue).
3. En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) = -16 \int_0^1 \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 4}{16 - x^8} dx$
(on pourra poser $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dans la formule de la question précédente, faire un changement de variable consistant à tout multiplier par $\sqrt{2}$, et un peu de calcul brutal).
4. Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale précédente. Commencez par factoriser le dénominateur $16 - x^8$ autant que vous le pouvez (on doit obtenir deux facteurs du premier degré et trois facteurs du second degré à discriminant négatif), ainsi que le numérateur $x^5 + x^4 + 2x^3 - 4$, en vous aidant du fait qu'il a plusieurs facteurs en commun avec le numérateur.
5. Terminer le calcul de l'intégrale et conclure.