Devoir Maison n° 3

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 4 novembre 2024

Problème

Soit $k \in \mathbb{R}$, le but du problème est d'étudier les fonctions f définies et dérivables sur $]0, +\infty[$ et solutions de l'équation (*) suivante : $\forall x > 0, f'(x) = kf\left(\frac{1}{x}\right)$.

I. Quelques exemples dans le cas général.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_\lambda(x) = (\lambda + \ln(x))\sqrt{x}$.

1. Calculer la dérivée f'_λ de la fonction f_λ .
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f_λ .
3. Donner l'équation de la tangente T_λ à la courbe représentative de la fonction f_λ en son point d'abscisse 1.
4. Montrer que toutes les droites T_λ se coupent en un même point, à préciser.
5. Tracer dans un même repère une allure des courbes représentatives des fonctions f_{-2} , f_{-3} et f_{-4} , ainsi que des tangentes T_λ correspondantes.
6. On note (E) l'équation différentielle $y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
 - (a) Résoudre l'équation différentielle (E).
 - (b) Déterminer l'unique solution de l'équation (E) vérifiant $y(1) = \lambda$.
7. Montrer qu'on peut choisir λ de façon à ce que f_λ soit une solution de l'équation (*). Préciser dans ce cas la valeur de k associée.

II. Résolution complète dans le cas où $k = -\frac{1}{2}$.

On suppose dans cette partie que f est une fonction solution de l'équation (*) pour $k = -\frac{1}{2}$, et on pose $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que la fonction g est constante.
2. En déduire que $f'(x) - \frac{1}{2x}f(x) = -\frac{f(1)}{\sqrt{x}}$.
3. Montrer que, si $f(1) = 0$, alors f est la fonction nulle.
4. On suppose désormais $f(1) \neq 0$. En utilisant la première partie du problème, déterminer une expression de f .

III. Résolution lorsque $k \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$.

Soit k un réel appartenant à l'intervalle $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$. On note (E_k) l'équation différentielle $x^2 y'' + k^2 y = 0$, qu'on cherchera à résoudre uniquement sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

1. Déterminer un réel $\alpha > \frac{1}{2}$ (dépendant de k) tel que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (E_k) .
2. En notant $z(x) = \frac{y(x)}{x^\alpha}$ (où α est la valeur déterminée à la question précédente), montrer que y est solution de (E_k) si et seulement si z' est solution d'une équation linéaire d'ordre 1 (E'_k) à déterminer.
3. Résoudre l'équation (E'_k) , et en déduire les solutions de l'équation (E_k) .
4. Dans le cas particulier où $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$, préciser la valeur de α et les solutions de (E_k) . Déterminer en particulier l'unique solution de (E_k) vérifiant $y(1) = 0$ et $y'(1) = -1$.
5. Déterminer les solutions de l'équation $(*)$ dans le cas où $k \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$.