Devoir Maison n$^\text{o}$ 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

1er octobre 2024

Exercice 1 : inégalités de Shapiro.

1. Quitte à tout mettre au même dénominateur, le numérateur de gauche doit être supérieur à celui de droite (au dénominateur, on n'a que des termes positifs), donc on veut montrer que $y_2(y_1+y_2)x_1^2 + y_1(y_1+y_2)^2x_2^2 \geqslant y_1y_2(x_1+x_2)^2$, soit en développant tout $x_1^2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_1y_2 \geqslant x_1^2y_1y_2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1y_2$. En passant tout à gauche et en simplifiant, il reste à démontrer $x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2 \geqslant 0$, soit exactement $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0$, ce qui est évidemment vrai.
2. On va évidemment procéder par récurrence. Pour $n = 1$ (ou même $n = 0$ si on y tient), l'inégalité est triviale. Pour $n = 2$, c'est exactement le cas traité à la question précédente. Supposons donc l'inégalité vérifiée pour un certain entier $n \geqslant 2$, et essayons de la vérifier avec un terme de plus. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on peut déjà dire que $\dfrac{x_1^2}{y_1} + \cdots + \dfrac{x_n^2}{y_n} + \dfrac{x_{n+1}^2}{y_{n+1}} \geqslant \dfrac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{y_1+\cdots+y_n} + \dfrac{x_{n+1}^2}{y_{n+1}}$. On pose alors $X_1 = x_1 + \cdots + x_n$, $Y_1 = y_1 + \cdots + y_n$ (qui est évidemment positif en tant que somme de réels positifs), $X_2 = x_{n+1}$ et $Y_2 = y_{n+1}$. On applique alors le cas $n = 2$ à ces valeurs et on obtient exactement l'inégalité souhaitée.
3. (a) Comme pour à peu près toutes les questions restantes, on va faire la différence et prouver que c'est positif : $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac) = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-3(ab+ac+bc) = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = \dfrac{1}{2}a^2 - ab + \dfrac{1}{2}b^2 + \dfrac{1}{2}a^2 - ac + \dfrac{1}{2}c^2 + \dfrac{1}{2}b^2 - bc + \dfrac{1}{2}c^2 = \dfrac{1}{2}(a-b)^2 + \dfrac{1}{2}(a-c)^2 + \dfrac{1}{2}(b-c)^2 \geqslant 0$.

   (b) Pour faire apparaître des carrés au numérateur (et donc appliquer la question 2), on multiplie les fractions du membre de gauche respectivement par a, b et c en haut et en bas : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} = \dfrac{a^2}{ab+ac} + \dfrac{b^2}{ba+bc} + \dfrac{c^2}{ca+cb} \geqslant \dfrac{(a+b+c)^2}{2ab+2ac+2bc}$. On applique maintenant le résultat qu'on vient de démontrer pour minorer ce quotient par $\dfrac{3(ab+ac+bc)}{2(ab+ac+bc)} = \dfrac{3}{2}$.
4. (a) Allons-y, on met tout du même côté et on cherche le signe : $(a+b+c+d)^2 - 2(a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)) = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd-2ab-2ac-2bc-2bd-2cd-2ac-2ad-2bd = a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd = (a-c)^2+(b-d)^2 \geqslant 0$.

   (b) Même technique que pour la question 3, on multiplie les fractions pour faire apparaître des carrés, puis on applique successivement la question 2 et la question précédente : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+d} + \dfrac{c}{d+a} + \dfrac{d}{a+b} = \dfrac{a^2}{a(b+c)} + \dfrac{b^2}{b(c+d)} + \dfrac{c^2}{c(d+a)} + \dfrac{d^2}{d(a+b)}$ $\geqslant \dfrac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)} \geqslant \dfrac{2(a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b))}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)} = 2$.

5. Si on veut appliquer la méthode de façon totalement similaire, il faut commencer par prouver que $2(a+b+c+d+e)^2 \geqslant 5(a(b+c)+b(c+d)+c(d+e)+d(e+a)+e(a+b))$ (por faire apparaître à la fin le facteur $\frac{5}{2}$). Faisons donc la différence, qui vaut $2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2e^2+4ab+4ac+4ad+4ae+4bc+4bd+4be+4cd+4ce+4de-5ab-5ac-5bc-5bd-5cd-5ce-5de-5ad-5ae-5be = a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-ab-ac-ad-ae-bc-bd-be-cd-ce-de = \frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2+\frac{1}{2}(a-d)^2+\frac{1}{2}(a-e)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(b-d)^2+\frac{1}{2}(b-e)^2+\frac{1}{2}(c-d)^2+\frac{1}{2}(c-e)^2+\frac{1}{2}(d-e)^2 \geqslant 0$. Oui, ça commence à devenir légèrement bourrin, mais le calcul s'agence tout de même remarquablement bien. La conclusion est exactement similaire à celle des questions 3 et 4 : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b} = \frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+e)}+\frac{d^2}{d(e+a)}+\frac{e^2}{e(a+b)} \geqslant \frac{(a+b+c+d+e)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+e)+d(e+a)+e(a+b)} \geqslant \frac{5}{2}$.

6. (a) Une question qui ressemble à ce qu'on a déjà fait plus haut, et qui se traite de la même façon : $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz = \frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(x-z)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2 \geqslant 0$.

   (b) Dans l'inégalité qu'on vient de prouver, on pose $x = a+d$, $y = b+e$ et $z = c+f$. Ainsi, on aura $x^2+y^2+z^2 = a^2+2ad+d^2+b^2+2be+e^2+c^2+f^2+2cf$, soit exactement le membre de droite de l'inégalité qu'on veut prouver. Et à gauche, $xy+xz+yz = (a+d)(b+e)+(a+d)(c+f)+(b+e)(c+f) = ab+ae+bd+be+ac+af+cd+cf+bc+bf+ce+cf$, soit la somme de tous les produits possibles à l'exception de ad, be et cf (aucun n'apparaissant deux fois). Or, $a(b+c)+b(c+d)+c(d+e)+d(e+f)+e(f+a)+f(a+b) = ab+ac+ae+af+bc+bd+bf+cd+ce+de+df+ef$, soit exactement la même expression, ce qui conclut la preuve de l'inégalité.

   (c) Pour gagner un peu de lisibilité dans la rédaction, on va noter $K = a(b+c)+b(c+d)+c(d+e)+d(e+f)+e(f+a)+f(a+b)$. On procède comme d'habitude en multipliant chaque fraction en haut et en bas par son numérateur, et on applique le résultat de la question 2 pour obtenir dans un premier temps $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b} \geqslant \frac{(a+b+c+d+e+f)^2}{S}$. Or, en développant brutalement, le numérateur de la fraction obtenue vaut $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2S+2(ad+be+cf)$ (puisqu'il manque trois doubles produits dans l'expression de $2S$ pour les avoir tous), il est donc minoré d'après la question précédente par $S+2S = 3S$, et il ne reste plus qu'à simplifier par le dénominateur pour obtenir $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b} \geqslant 3$.

Pour information, les inégalités de Shapiro étaient le point de départ du sujet de Maths Ulm/Lyon 1997 (épreuve de 6 heures), que vous pouvez facilement dénicher sur Internet (n'essayez pas de tout faire, vous aurez un peu de mal...).

Exercice 2

1. Un ensemble 1-syndétique vérifie la définition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{n\} \neq \emptyset$. L'ensemble $\{n\}$ ne contenant qu'un élément, cela revient exactement à dire que $n \in A$ pour tout entier n. Autrement dit, on a nécessairement $A = \mathbb{N}$. Réciproquement, $A = \mathbb{N}$ est 1-syndétique de façon évidente.

2. Pour tout entier naturel n, $\{n, n+1, \dots, n+k-1\} \subset \{n, n+1, \dots, n+k\}$, donc, quel que soit l'ensemble A, $A \cap \{n, n+1, \dots, n+k-1\} \subset A \cap \{n, n+1, \dots, n+k\}$. Si l'ensemble de gauche est non vide, celui de droite le sera donc également, ce qui prouve que A k-syndétique implique A $k+1$-syndétique.

3. L'exemple le plus évident est $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble n'est pas 2-syndétique puisqu'il a par exemple une intersection vide avec $\{1, 2\}$, qui est de la forme $\{1, 1+2-1\}$ pour $n = 1$. Par contre, tout ensemble de la forme $\{n, n+1, n+2\}$ contient (exactement un multiple de 3 (donc a une intersection non vide avec A). En effet, soit n est lui-même multiple de 3, soit il est congru à 1 modulo 3, et $n+2$ est multiple de 3, soit il est congru à 2 modulo 3 et $n+1$ est multiple de 3.

   Exactement de la même façon, on démontre que l'ensemble des multiples de $k+1$ est un ensemble $(k+1)$-syndétique (en notant p la congruence de n modulo $k+1$, $n + (k+1-p)$ sera toujours un multiple de $k+1$), mais pas un ensemble k-syndétique puisqu'il ne contient aucun élément de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$.

4. Les entiers pairs forment d'après la question précédent un exemple d'ensemble 2-syndétique mais pas 1-syndétique. Il est bien sûr aussi k-syndétique pour tout entier $k \geqslant 2$ (d'après la question 2).

5. Non, A_2 n'est pas syndétique : entre deux éléments consécutifs de l'ensemble A_2, donc des entiers de la forme n^2 et $(n+1)^2$, il existe exactement $2n$ entiers consécutifs n'appartenant pas à A_2 (puisque $(2n+1)^2 = n^2+2n+1$, tous les nombres de la forme n^2+k avec $k \in \{1, \dots, 2n\}$ ne sont pas dans A_2). L'ensemble A_2 ne peut donc pas être $2n$-syndétique, quelle que soit la valeur de l'entier n. Il n'est donc pas du tout syndétique.

6. Le principe est le même qu'à la question précédente, il faut en fait prouver que l'écart entre deux nombres entiers consécutifs n'est pas majoré. C'est en fait assez facile : pour un entier $n \geqslant 2$ quelconque, on considère les entiers consécutifs $n! + 2$, $n! + 3$, ..., $n! + n$. Aucun de ces entiers n'est premier : $n! + 2$ est divisible par 2 (puisque $n!$ est divisible par 2), $n! + 3$ est divisible par 3, et ainsi de suite jusqu'à $n! + n$ qui est divisible par n. L'ensemble A_3 ne peut donc pas être $n-1$-syndétique, et comme c'est vrai pour tous les entiers, il n'est pas syndétique. On a donc prouvé en quelque sorte que « l'écart maximal entre deux nombres premiers consécutifs est infini ». Rappelons en passant que l'écart minimal entre deux nombres premiers est évidemment 1 (atteint uniquement pour 2 et 3), mais qu'on ne sait toujours pas s'il existe une infinité de paires de nombres premiers jumeaux (différence 2). Les plus grands nombres premiers jumeaux connus à l'heure actuelle ont quelques centaines de milliers de chiffres...

7. C'est très simple à construire de façon intuitive : on prend les entiers naturels « dans l'ordre » et on en met un dans A, puis un dans $\overline{A}$, puis deux dans A, deux dans $\overline{A}$, trois dans A, trois dans $\overline{A}$ etc. Si on veut une formulation concrète (légèrement différente de la construction décrite juste avant), on peut par exemple prendre $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n^2 + k \mid k \in \nvdash, \nVdash, \dots, \ltimes\}$. Entre n^2 et $n^2 + n$ on aura toujours $n+1$ entiers consécutifs appartenant à A, et entre $n^2 + n$ et $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, on aura n entiers appartenant à $\overline{A}$, ce qui prouve qu'aucun des deux ne peut être syndétique.