# Devoir Maison n° 2

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 1er octobre 2024

## Exercice 1 : inégalités de Shapiro.

Le but de cet exercice est de démontrer quelques inégalités sur les réels qu'on peut inclure dans une série plus générale d'inégalités énoncées en 1954 par le mathématicien américano-suédois Harold Shapiro (mort il y a trois ans et demie à l'âge respectable de 92 ans).

1. Soient $x_1$, $x_2$ deux réels **quelconques** et $y_1$, $y_2$ deux réels **strictement positifs**. Montrer que $\dfrac{x_1^2}{y_1} + \dfrac{x_2^2}{y_2} \geqslant \dfrac{(x_1+x_2)^2}{y_1+y_2}$.
2. En déduire que, si $(x_1, \dots, x_n)$ sont des réels quelconques, $(y_1, \dots, y_n)$ des réels strictement positifs, alors $\dfrac{x_1^2}{y_1} + \cdots + \dfrac{x_n^2}{y_n} \geqslant \dfrac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + \cdots + y_n}$.
3. (a) Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels strictement positifs, montrer que $3(ab + bc + ac) \leqslant (a+b+c)^2$

   (b) En utilisant le résultat de la question 2, en déduire que $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.
4. (a) Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre réels strictement positifs, montrer que $2(a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)) \leqslant (a+b+c+d)^2$.

   (b) En déduire que $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+d} + \dfrac{c}{d+a} + \dfrac{d}{a+b} \geqslant 2$.
5. En s'inspirant des questions précédentes, montrer que $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+d} + \dfrac{c}{d+e} + \dfrac{d}{e+a} + \dfrac{e}{a+b} \geqslant \dfrac{5}{2}$, toujours en supposant les cinq variables strictement positives.
6. Devinez quoi ? Ça marche encore avec six variables.

   (a) Montrer que, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $xy + yz + xz \leqslant x^2 + y^2 + z^2$ (aucune hypothèse de positivité ici).

   (b) En déduire que $a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b) \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ad + be + cf)$, en supposant comme vous vous en doutez les six variables strictement positives.

   (c) Montrer que $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+d} + \dfrac{c}{d+e} + \dfrac{d}{e+f} + \dfrac{e}{f+a} + \dfrac{f}{a+b} \geqslant 3$.

Bien entendu, après avoir péniblement démontré tout ça, vous imaginez qu'on peut généraliser à autant de variables qu'on le souhaite, avec un minorant égal à $\dfrac{n}{2}$ ? Eh bien pas du tout, ça marche pour les entiers pairs jusqu'à 12 et impairs jusqu'à 23 mais pas au delà. Plus de précisions sur la page Wikipedia consacrée à l'inégalité de Shapiro si vous êtes motivés.

## Exercice 2

Soit $k$ un entier naturel non nul, un sous-ensemble $A \subset \mathbb{N}$ est $k$-syndétique s'il contient un élément de toute suite de $k$ entiers consécutifs. Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{n, n+1, \dots, n+k-1\} \neq \emptyset$. Un ensemble $A$ qui est $k$-syndétique pour au moins un entier $k$ est simplement dit syndétique.

1. Quels sont les ensembles $A$ qui sont 1-syndétiques (on démontrera évidemment le résultat affirmé) ?
2. Montrer que, si $A$ est un ensemble $k$-syndétique, alors $A$ est aussi $k+1$-syndétique.
3. La réciproque du résultat précédent est fausse. Donner un exemple d'ensemble $A$ qui est 3-syndétique mais pas 2-syndétique. Généraliser en donnant un exemple d'ensemble $A$ qui est $k+1$-syndétique mais pas $k$-syndétique pour un entier $k \geqslant 1$ quelconque.
4. L'ensemble $A_1$ constitué des entiers pairs est-il syndétique ? Si oui, pour quelle valeur de $k$ ?
5. L'ensemble $A_2 = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ est-il syndétique ? Si oui, pour quelle valeur de $k$ ?
6. L'ensemble $A_3 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est premier}\}$ est-il syndétique ? Si oui, pour quelle valeur de $k$ ?
7. Donner un exemple d'ensemble $A$ pour lequel ni $A$ ni $\mathbb{N} \backslash A$ ne sont syndétiques.