Devoir Maison n° 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

9 septembre 2024

Exercice 1

1. En tant que quotient de deux fonctions 2π-périodiques, la fonction tangente est bel et bien 2π-périodique. Le fait que sa période **minimale** soit égale à π et non à 2π n'empêche pas que l'énoncé proposé soit vrai.
2. C'est complètement faux, la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante n'a aucune raison d'être monotone. En fait, c'est même nettement pire : on peut écrire n'importe quelle suite comme somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante ! Soit (w_n) une suite quelconque, on pose $u_0 = w_0$ et $v_0 = 0$ (n'importe quel autre couple de valeurs vérifiant $u_0 + v_0 = w_0$ conviendrait). Ensuite, on définit les deux suites (u_n) et (v_n) par récurrence : pour tout entier n, si $w_{n+1} \geqslant w_n$, on pose $u_{n+1} = u_n + w_{n+1} - w_n$ (qui est plus grand que u_n) et $v_{n+1} = v_n$. Inversement, si $w_{n+1} < w_n$, on conserve $u_{n+1} = u_n$ et on pose $v_{n+1} = v_n + w_{n-1} - w_n$ (strictement inférieur à v_n par hypothèse). Les deux suites ainsi construites sont respectivement croissante et décroissante, et on démontre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$ (c'est le cas au rang 0, et dans les deux cas précédemment décrits, on aura toujours $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n + w_{n+1} - w_n$, qui sera égal à w_{n+1} si on suppose $u_n + v_n = w_n$).
3. C'est vrai, mais il faut bien montrer les deux implications pour prouver l'équivalence. Si n est un entier pair, de la forme $n = 2k$ (avec $k \in \mathbb{N}$) alors $n^2 = 4k^2$ est aussi pair. Reciproquement, si $n = 2k+1$ est impair, alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ est impair, ce qui par contraposée prouve que n^2 pair implique n pair. L'équivalence est donc démontrée.
4. C'est faux, on le démontre facilement par l'absurde : si m était ce plus petit élément, strictement positif par hypothèse, alors $\dfrac{m}{2}$ serait un autre réel strictement positif, mais strictement inférieur à m, ce qui contredit le fait que m est minimal.
5. Si on lance cinq fois de suite une pièce équilibrée, il y a $2^5 = 32$ tirages équiprobables possibles. Parmi ceux-ci, seulement deux ne présentent **pas** de répétition de résultat : l'alternance $PFPFP$ (P pour Pile, F pour Face), et l'alternance $FPFPF$. La probabilité d'obtenir au moins une fois une répétition vaut donc $1 - \dfrac{2}{32} = \dfrac{15}{16} > \dfrac{9}{10}$. L'affirmation de l'énoncé est donc vraie.
6. Cette équation admet 1 pour solution évidente : $1-4+7-6+2 = 0$. On peut donc factoriser le membre de gauche de l'équation sous la forme $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 6z + 2 = (z-1)(az^3 + bz^2 + cz + d) = az^4 + (b-a)z^3 + (c-b)z^2 + (d-c)z - d$. Par identification des coefficients, on obtient $a = 1$, $b - a = -4$, donc $b = -3$, puis $c - b = 7$, donc $c = 4$, et enfin $d - c = -6$, donc $d = -2$, ce qui est cohérent avec la dernière équation. Le facteur obtenu, $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$, admet à nouveau 1 comme racine évidente. Pas la peine d'aller plus loin, si on factorise encore par $z - 1$, on trouvera un polynôme du second degré qui ne peut pas avoir plus de deux racines complexes, ce qui en laissera au maximum trois (distinctes) pour l'équation initiale. L'énoncé proposé est donc faux.

Exercice 2

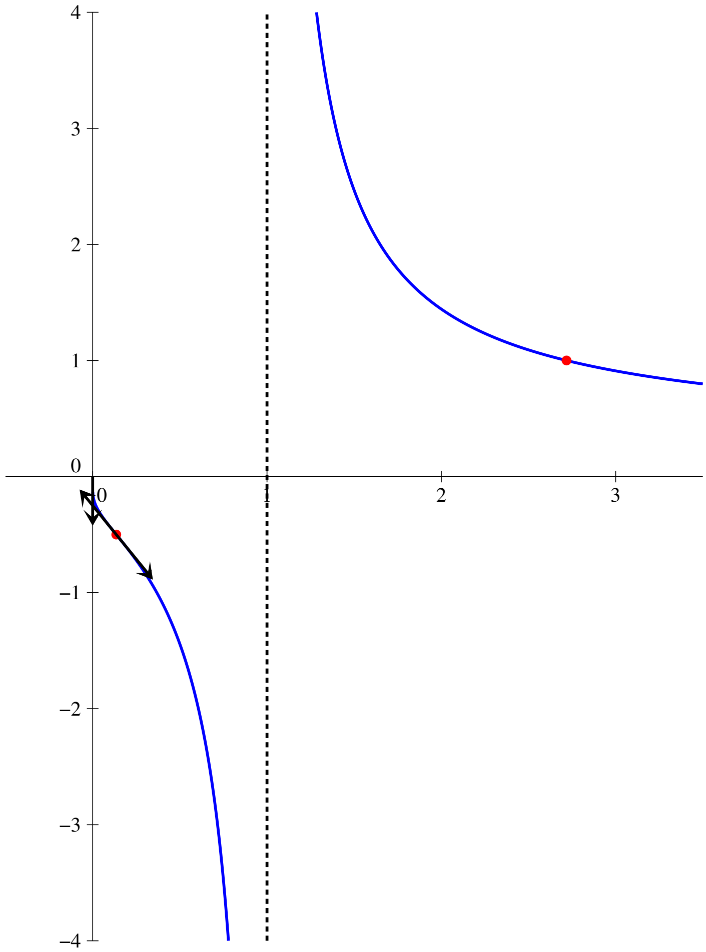
Une fonction dont l'expression est très simple, mais pour laquelle on peut étudier beaucoup de choses :

- **domaine de définition** : la présence de la fonction ln dans l'expression de f réduit déjà le domaine de définition à $\mathbb{R}^{+*}$, et il faut en plus que le dénominateur ne s'annule pas, ce qui impose $x \neq 1$. On a donc $\mathcal{D}_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
- **limites et prolongement** : aucun calcul de limite ne pose problème, il suffit de connaître les limites de la fonction ln. On obtient donc sans difficulté $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. On en déduit la présence d'une asymptote verticale d'équation $x = 1$, d'une asymptote horizontale en $+\infty$ (qui n'est autre que l'axe des abscisses), mais aussi d'un prolongement par continuité en 0 : si on « ajoute » la valeur $f(0) = 0$, la fonction f devient définie et continue sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$. Mais cette fonction prolongée est-elle dérivable en 0 (une information importante si on veut tracer un début de courbe réaliste) ? Le taux d'accroissement de notre fonction prolongée en 0 est défini par $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, donc notre taux d'accroissement a une limite infinie en 0 (et même égale à $-\infty$ puisque le taux d'accroissement est négatif sur $]0,1[$). La fonction f n'est donc pas dérivable en 0, mais sa courbe y admettra une tangente verticale.
- **variations** : f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x\ln^2(x)} < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (évitez par contre de dire qu'elle est strictement décroissante sur $\mathcal{D}_f$, car c'est faux !). On peut résumer les informations déjà obtenues dans le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
f	0 $\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	0

- **convexité** : la fonction f est dérivable une deuxième fois, et $f''(x) = \dfrac{\ln^2(x) + x \times \frac{2\ln(x)}{x}}{x^2\ln^4(x)} = \dfrac{\ln(x)(\ln(x)+2)}{x^2\ln^4(x)}$. Cette dérivée seconde est du signe de son numérateur, qui s'annule pour $x = 1$ et $x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$, et sera positive à l'extérieur de ces racines (c'est juste une expression du second degré). La fonction f est donc concave sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e^2},1\right[$ et convexe sur les intervalles $\left]0,\dfrac{1}{e^2}\right]$ et $]1,+\infty[$. Puisque $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, il y a aura sur sa courbe un point d'inflexion de coordonnées $\left(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{2}\right)$. La tangente en ce point d'inflexion a pour coefficient directeur $f'\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = -\dfrac{e^2}{4} \simeq -1.8$. Signalons en passant que $\dfrac{1}{e^2} \simeq 0.14$, ça servira pour la courbe.
- **signe** : bon, ça c'est assez évident, f est négative sur $]0,1[$ et positive sur $]1,+\infty[$, ce qui était de toute façon déjà visible dans notre tableau de variations.
- **courbe** : la tangente au point d'inflexion traverse la courbe, pas évident à représenter à une bonne échelle ici (sur mon tracé évidemment fait à l'ordinateur, les tangentes empêchent de voir la courbe). Si on tient absolument à avoir un point de repère sur l'intervalle $]1,+\infty[$ où

on manque d'information, on peut signaler que $f(e) = 1$.



Exercice 3

1. Les fonction x et y sont toutes les deux 2π-périodiques de façon assez évidente (par exemple $x(t+2\pi) = 2\cos(t+2\pi) - \cos(2t+4\pi) = 2\cos(t) - \cos(2t) = x(t)$), et on ne peut pas obtenir de période plus petite. Puisque x **et** y ont la même période 2π, le point de paramètre $t + 2\pi$ sera toujours situé au même endroit que le point de paramètre t. La courbe va donc se contenter de repasser en permanence sur les points obtenus lors de l'étude sur $[0, 2\pi]$, qui sera donc suffisante pour tracer l'intégralité de ladite courbe.
2. La fonction x est paire (car la fonctions cosinus l'est) et la fonction y est impaire (car la fonction sinus l'est). Le point de paramètre $-t$ aura donc la même abscisse mais une ordonnée opposée à celle du point de paramètre t. Autrement dit, ces deux points seront symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Une étude sur $[0, \pi]$ suivie d'une symétrie par rapport à cet axe (pour obtenir les points de paramètre appartenant à $[-\pi, 0]$) sera donc suffisante pour avoir une période complète.
3. La suggestion de l'énoncé d'utiliser les formules de duplication est une énorme arnaque puisqu'on n'en a pas besoin. Deux angles ont le même cosinus s'ils sont égaux ou opposés modulo 2π. On a donc $2x \equiv x[2\pi]$, soit $x \equiv 0[2\pi]$, ou bien $2x \equiv -x[2\pi]$, soit $x \equiv 0 \left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$. Sur l'intervalle $[0, \pi]$, les seules solutions sont donc 0 et $\dfrac{2\pi}{3}$. Si on veut vraiment utiliser les formules de duplication, on a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. On pose $X = \cos(x)$ pour se ramener à l'équation du second degré $2X^2 - X - 1 = 0$, qui a pour solution évident $X = 1$, et pour deuxième

solution $X = -\dfrac{1}{2}$. On a donc $\cos(x) = 1$ (qui donne $x = 0$ sur l'intervalle de résolution), ou $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$, qui permet de retrouver $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

On dispose des deux mêmes méthodes pour la deuxième équation. Utilisons directement la formule de duplication : $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. L'équation devient donc $2\sin(x)\cos(x) = \sin(x)$, soit $\sin(x)(2\cos(x) - 1) = 0$. On a donc $\sin(x) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = \pi$, ou $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$, donc $x = \dfrac{\pi}{3}$.

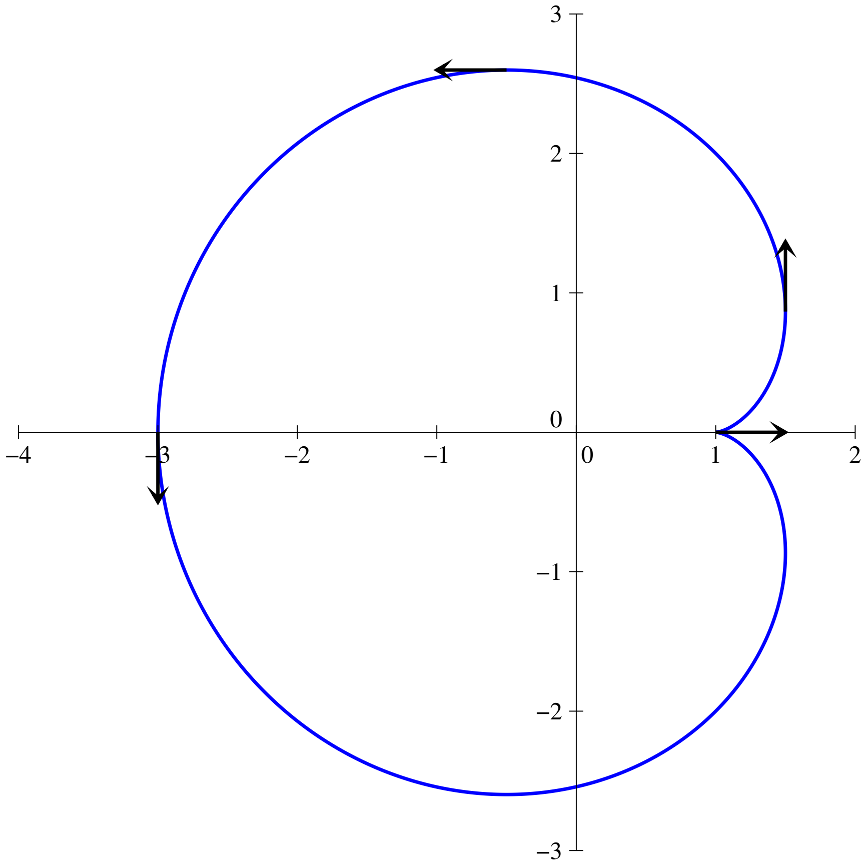
4. Les deux fonctions sont évidemment dérivables, $x'(t) = -2\sin(t) + 2\sin(2t) = 2(\sin(2t) - \sin(t))$ s'annule pour $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$ et $x = \pi$ (question précédente), est positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, puis négative ensuite (si on a un doute sur le signe, on calcule une valeur simple de l'intervalle) ; $y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 2(\cos(t) - \cos(2t))$ s'annule en 0 et $\dfrac{2\pi}{3}$, est positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ puis négative ensuite. On calcule les valeurs importantes : $x(0) = 2 - 1 = 1$, $x\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2 \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $x\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -2 \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, $x(\pi) = -2 - 1 = -3$, $y(0) = 2 \times 0 - 0 = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $y(\pi) = 0 - 0 = 0$. Il est temps de faire le tableau de variations demandé :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$		
$filet$						-3	
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

5. Quand on sait que l'une des deux dérivées s'annule et pas l'autre, la tangente sera horizontale ou verticale, la valeur exacte de l'autre dérivée n'est en fait pas très importante. Calculons quand même $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + 1 = 2$, $x'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$, et $y'(\pi) = -2 - 2 = -4$. Le vecteur tangent en $\dfrac{\pi}{3}$ est donc $(0, 2)$, celui en $\dfrac{2\pi}{3}$ est $(-2\sqrt{3}, 0)$, et celui en π est $(0, -4)$. Pour le point de départ en $t = 0$, les deux dérivées s'annulent, il faut donc calculer $x''(t) = -2\cos(t) + 4\cos(2t)$ et $y''(t) = -2\sin(t) + 4\sin(2t)$ et évaluer en 0 pour trouver un vecteur tangent de coordonnées $(2, 0)$ (donc horizontal).

6. Dans un répère orthonormal, placer tous les points de la courbe $\mathcal{C}$ étudiés précédemment en indiquant à chaque fois le vecteur tangent, et en déduire une allure de la courbe $\mathcal{C}$ (en gros, contentez-vous de relier les points importants de la façon la plus crédible possible ; vous pouvez bien sûr rajouter quelques points supplémentaires pour lesquels le calcul des coordonnées et du vecteur tangent n'est pas compliqué, par exemple pour $t = \dfrac{\pi}{6}$ ou $t = \dfrac{\pi}{4}$).

7. On indique bien sûr les points remarquables avec les tangentes correspondantes (sur la figure, seule la direction des tangentes est respectée mais pas leur norme, qui représente techniquement la vitesse instantanée du point si on considère la courbe comme une trajectoire dans le plan), et on n'oublie pas la symétrie par rapport à l'axe des abscisses pour obtenir la courbe complète.



3
2
1
0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
−1
−2
−3