

Devoir Maison n° 11 (Capes 2025) : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

7 mai 2025

Problème 1 : VRAI-FAUX

Calculs dans $\mathbb{R}$

1. Faux, la taxe représente 10% du prix de vente initial, et pas 10% du prix de vente total (TTC). Le prix initial de l'article était de 100 euros, ce qui donne bien 110 euros TTC en y ajoutant une taxe de 10%, donc une taxe de 10 euros.
2. Vrai, on s'en rend par exemple compte avec une petite mise sous forme canonique : $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)^2 + \frac{3}{4}\beta^2$, qui est positif comme somme de deux carrés.
3. Faux, la négation d'une implication du type $P \Rightarrow Q$, qui est logiquement équivalente à $\neg P \cup Q$ est la proposition $P \cap \neg Q$. Ici, la négation serait donc ($a > 1$ et $b > 1$ et $a + b \leq 2$), ce qui n'a rien à voir avec la propriété proposée.
4. Vrai : quitte à faire un petit changement de variable en posant $X = 2025x$, on cherche à résoudre l'équation $\cos(X) = 1$ sur l'intervalle $] -2025\pi, 2025\pi]$. Cette équation a pour solutions les nombres de la forme $2k\pi$, avec $-1012 \leq k \leq 1012$, ce qui fait bien 2025 solutions (autre façon de voir les choses : l'équation $\cos(x) = 1$ a exactement une solution sur tout intervalle de la forme $]x, x + 2\pi]$ à cause de la périodicité de la fonction cosinus).

Arithmétique

5. Vrai, supposons que $f(n) = f(p)$ pour deux entiers n et p , alors $8n^2 - 10n = 8p^2 - 10p$, donc $8n^2 - 8p^2 - 10n + 10p = 0$, soit $8(n+p)(n-p) - 10(n-p) = 0$. En factorisant, $f(n) = f(p)$ est équivalent à $(n-p)(8n+8p-10) = 0$. Ce sera bien sûr le cas si $n = p$, mais aussi lorsque $n + p = \frac{5}{4}$, condition qui ne sera toutefois jamais vérifiée pour des variables entières.
6. Vrai, $2^{3n} = 8^n$, et $8 \equiv 1[7]$ implique $8^n \equiv 1^n[7] \equiv 1[7]$, donc $8^n - 1$ est toujours un multiple de 7.
7. Faux, si c'était vrai, on aurait par exemple toujours $x^0 \equiv x^n[n]$, donc $x^n \equiv 1[n]$, ce qui est trivialement faux quand x est un multiple de n .
8. Vrai, démonstration classique par récurrence de cette question de cours que je refuse de faire figurer dans ce corrigé.

Analyse réelle

9. Faux, la suite (u_n) est géométrique de raison négative, elle a donc des termes alternativement positifs et négatifs et ne peut sûrement pas tendre vers $+\infty$.
10. Vrai, si (u_n) admettait une limite, par somme, la suite $((-1)^n)$ convergerait vers la même limite, ce qui est absurde.

11. Vrai, si on note l la limite de la suite et qu'on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}l$ (strictement positif par hypothèse), la définition de la limite assure l'existence d'un entier n_0 à partir duquel $\frac{1}{2}l \leq u_n \leq \frac{3}{2}l$. En particulier, $u_n > 0$ à partir du rang n_0 .
12. Faux, la suite récurrente n'est même pas monotone quand f est décroissante. Un contre-exemple évident : on pose $f(x) = -x$ et $u_0 = 1$. La suite sera alors périodique, prenant alternativement les valeurs 1 et -1 , et donc pas du tout décroissante.
13. Vrai, la droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente à la courbe de l'exponentielle en 0, et ne coupe donc la courbe qu'à cet endroit.
14. Faux, c'est évidemment la réciproque de ce résultat qui est vraie (je m'inquiète sincèrement pour les candidats au CAPES qui auront mal répondu à cette question). Un contre-exemple classique : la fonction valeur absolue est continue mais pas dérivable en 0.
15. Vrai, la fonction f est la primitive de $t \mapsto e^{-t}$ s'annulant en 0, donc $f(x) = 1 - e^{-x}$. Cette fonction est effectivement bornée sur $\mathbb{R}^+$ (ses valeurs sont comprises entre 0 et 1).
16. Faux, la suite est décroissante, conséquence évidente du fait que, $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} \leq x^n$, donc $x^{n+1}e^{-x} \leq x^n e^{-x}$ (produit par une valeur positive), puis par intégration des inégalités $I_{n+1} \leq I_n$.
17. Faux, on effectue une IPP sur $I_{n+1} = \int_1^e t(\ln(t))^{n+1} dt$ en posant $u(t) = \ln^{n+1}(t)$, donc $u'(t) = (n+1)\frac{\ln^n(t)}{t}$, et $v'(t) = t$ qu'on intègre classiquement en $v(t) = \frac{t^2}{2}$. On en déduit $I_{n+1} = \left[\frac{t^2}{2} \ln^{n+1}(t) \right]_1^e - (n+1) \int_1^e \frac{t}{2} \ln^n(t) dt = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$. Il y a donc une légère erreur de signe dans la formule proposée.

Géométrie

18. Faux, dans la configuration proposée, on calcule aisément $\widehat{CDA} = 65$ (mais qu'est-ce que c'est que ces angles en degrés, sérieusement ?), $\widehat{EDB} = 75$ et $\widehat{ADB} = 50$ (même pas besoin de calcul pour celui-ci avec le triangle isocèle), donc $\widehat{CDE} = 190$, pas vraiment un angle plat.
19. Vrai, on peut appliquer la formule d'Al-Kashi (ou un bête produit calcul de produit scalaire) pour obtenir, à partir des longueurs des côtés du triangle, $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2 \times AB \times AC} (AB^2 + BC^2 - AC^2) = \frac{64 + 16 - 48}{64} = \frac{1}{2}$, ce qui correspond bien à un angle géométrique de $\frac{\pi}{3}$.
20. Faux, les points sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (2, -1)$ et $\overrightarrow{AM} = (5x - 1, x^2 - 3)$ sont colinéaires, donc si leur déterminant est nul. Ce déterminant est égal à $2(x^2 - 3) + 5x - 1 = 2x^2 + 5x - 7$. Il s'annule effectivement pour $x = 1$, mais aussi pour $x = -\frac{7}{2}$, donc l'équivalence proposée est fautive.
21. Vrai, avec les hypothèses faites, le plan (ABC) (qui ne peut pas être réduit à une droite puisque les points sont supposés non alignés) est distinct du plan (P) et ne peut pas être parallèle à (P) (sinon les droites ne coupent pas le plan !). L'intersection des plans (ABC) et (P) est donc une droite, qui contient par construction les points A', B' et C' .
22. Faux, dans le repère orthonormal $\left(D, \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}, \frac{1}{5}\overrightarrow{DC}, \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}\right)$, on a les coordonnées suivantes : $I\left(4, \frac{5}{2}, 0\right)$, $H(0, 0, 3)$ et $F(4, 5, 3)$. On en déduit que $\overrightarrow{HI} = \left(4, \frac{5}{2}, -3\right)$ et $\overrightarrow{HF} = (4, 5, 0)$, puis $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HF} = 16 + \frac{25}{2} = \frac{57}{2}$. Comme $\|\overrightarrow{HI}\| = \sqrt{16 + \frac{25}{4} + 9} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ et $\|\overrightarrow{HF}\| = \sqrt{16 + 25} =$

$\sqrt{41}$, on déduit du calcul de produit scalaire précédent que $\cos(\widehat{FHI}) = \frac{57}{5\sqrt{5} \times \sqrt{41}}$. Et là, si on n'a pas sa calculatrice sous la main, on est mal ! Heureusement, elle est autorisée et nous informe que l'angle correspondant est d'environ 37 degrés. Une question franchement débile.

23. Faux, méthode astucieuse, on calcule $e^{-i\frac{\pi}{12}}(e^{2i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}) = e^{i\frac{7\pi}{12}} + e^{-\frac{7\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, donc $e^{2i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$. Mais attention, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < 0$, donc l'argument principal du nombre proposé est $-\frac{11\pi}{12}$ et pas $\frac{\pi}{12}$.

Algèbre linéaire

24. Vrai, $\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$, l'égalité proposée est donc vraie si et seulement si $u \cdot v = 0$.
25. Vrai, le produit des valeurs propres est égal au déterminant de la matrice, qui vaut bien 2.
26. Vrai, si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors $A^2 = PD^2P^{-1}$ est semblable à D^2 qui est aussi diagonale.

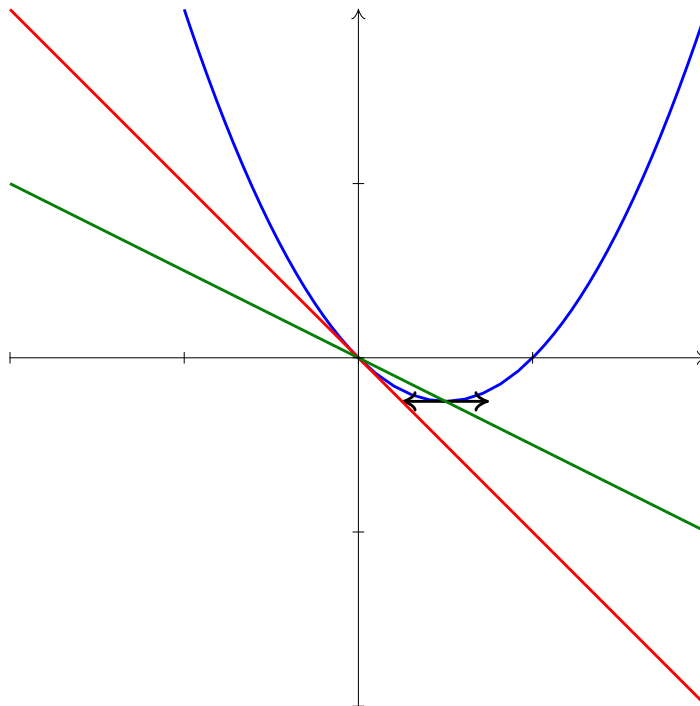
Dénombrement et probabilités

27. Vrai, si on suppose vérifiée la condition « le premier candidat est une femme », il reste pour le deuxième entretien 19 candidats dont 12 femmes.
28. Faux, le concepteur de ce programme (sûrement un élève de PCSI) a commis la grossière erreur de mettre l'instruction incrémentant le compteur s à l'extérieur des boucles `for`. La valeur affichée pour s sera donc systématiquement égale à 1 en fin de boucle.

Problème 2 : meilleure approximation affine

Étude d'un exemple

- Il n'y a rien à étudier, f est une fonction polynomiale trivialement dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- La fonction f admet pour minimum $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, elle prend la valeur 0 pour $x = 1$ et $x = 0$, d'où l'allure de courbe suivante (l'énoncé était rédigé de façon très étrange, puisqu'il semble demander de tracer une courbe sortie de nulle part, sans avoir fait la moindre étude de fonction).



3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 1$. En particulier, $f'(0) = -1$ et la tangente à la courbe de f en 0 a donc pour équation $y = -x$ (droite rouge sur le graphique précédent).
4. (a) Effectivement, h est une fonction affine vérifiant $h(0) = f(0) = 0$, elle correspond donc à la définition d'une approximation affine (droite verte sur le graphique précédent).
- (b) On a $f(x) - t(x) = x^2$ et $f(x) - h(x) = x^2 - \frac{1}{2}x$. L'inégalité $|f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)|$ est trivialement vérifiée pour $x = 0$, et dans ce cas la condition équivalente proposée par l'énoncé est également vraie. Si $x \neq 0$, on peut simplifier par $|x|$ et $|x^2| \leq \left|x^2 - \frac{1}{2}x\right| \Rightarrow |x| \leq \left|x - \frac{1}{2}\right|$.
- (c) Sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $x - \frac{1}{2} \leq 0$, donc l'inégalité obtenue à la question précédente est équivalente à $x \leq \frac{1}{2} - x$, soit $x \leq \frac{1}{4}$. Si $x < 0$, l'inégalité devient équivalente à $-x \leq \frac{1}{2} - x$, et elle est cette fois-ci toujours vérifiée. En particulier, l'inégalité $|f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)|$ est vérifiée sur l'intervalle $\left]-42, \frac{1}{4}\right[$ qui est un intervalle ouvert contenant 0, ce qui prouve que t est une meilleure approximation affine que h .
5. (a) Oui, c'est vrai, puisque $g_k(0) = 0$.
- (b) Puisque $f(x) - g_k(x) = x^2 - (1 + k)x$, c'est exactement le même calcul qu'à la question 4.b.
- (c) Là encore, on reprend quasiment à l'identique les calculs effectués en question 4. Si $x \leq 0$ et $k > -1$, l'inéquation devient $-x \leq 1 + k - x$, qui est toujours vérifiée. Si par contre $k < -1$, $|1 + k - x| = x - 1 - k$, et l'inégalité n'est vraie que si $2x \geq -1 - k$, donc $x \geq -\frac{1 + k}{2}$. Dans les deux cas, l'inégalité est vraie sur l'intervalle $\left]-\frac{1 + k}{2}, 0\right]$. Si par contre $x \geq 0$, dans le cas où $k < -1$, l'inégalité devient $x \leq x - 1 - k$, qui est toujours vérifiée. Et si $k > -1$, on retrouve une inégalité qui n'est vérifiée que sur l'intervalle $\left[0, \frac{1 + k}{2}\right]$.

6. La fonction t est donc une meilleure approximation affine que chacune des fonctions g_k . Or, toutes les approximations affines de f en 0 devant s'annuler en 0, il s'agit de fonctions linéaires de la forme g_k (si $k = -1$ on retombe sur t elle-même). On a donc prouvé que t était la meilleure approximations affine disponible pour f en 0.

Cas général

7. Une approximation affine doit avoir une expression de la forme $g(x) = \alpha + \beta x$, et de plus vérifier $g(a) = f(a)$, donc $\alpha + \beta a = f(a)$. Autrement dit, $\alpha = f(a) - \beta a$, donc $g(x) = f(a) + \beta(x - a)$, ce qui correspond exactement à la formule donnée dans l'énoncé.
8. Calcul trivial : $T(x) = \frac{f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$. Par définition du nombre dérivée, la limite de cette expression est nulle quand x tend vers a . Pour l'autre limite, on a de même $G(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - k$, qui a pour limite $f'(a) - k$.
9. Fixons une valeur de $k \neq f'(a)$. La limite de T étant nulle, il existe un voisinage de a sur lequel on aura $|T(x)| \leq \frac{1}{2}|k - f'(a)|$ (on applique la définition de la limite avec un ε égal à cette valeur). De même, la limite de G étant égale à $k - f'(a)$, il existe un voisinage de a sur lequel $|G(x)| > \frac{1}{2}|k - f'(a)|$. Sur l'intersection de ces deux voisinages (qui reste un voisinage de a), on aura donc $|T(x)| < |G(x)|$, ce qui implique $|f(x) - t(x)| < |f(x) - g(x)|$. La fonction t est donc une meilleure approximation affine que g . Comme cela est vrai indépendamment de la fonction g choisie, on a démontré que t était à nouveau la meilleure approximation affine de f en a .

Relation d'ordre

10. C'est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive, voir le cours pour la signification de tous ces termes.
11. Puisque les inégalités sont larges dans la définition de « meilleure approximation affine », la réflexivité est clairement vérifiée. La transitivité est triviale : si $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_2(x)| \leq |f(x) - g_3(x)|$, alors $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_3(x)|$ (on peut toujours trouver un voisinage de a sur lequel les deux inégalités sont vraies simultanément, il suffit de prendre l'intersection des deux voisinages obtenus pour chacune des deux majorations). Enfin, l'antisymétrie est tout aussi triviale : là encore on peut trouver un voisinage commun sur lequel on aura à la fois $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_2(x)|$ et $|f(x) - g_2(x)| \leq |f(x) - g_1(x)|$, donc sur lequel $g_1(x) = g_2(x)$. Bien sûr, cette égalité n'est a priori vraie que sur un intervalle ouvert contenant a , mais deux fonctions affines qui coïncident sur un intervalle ouvert sont égales sur $\mathbb{R}$ tout entier (il suffit même qu'elles coïncident en deux points pour que ce soit vrai). La relation est donc bien une relation d'ordre, dont la tangente à la courbe en a consitue un minimum quand la fonction est dérivable en a . Les curieux s'amuseront à démontrer que, sous cette même hypothèse, la relation a aussi un maximum, qui est la droite perpendiculaire à cette tangente au point $(a, f(a))$. Si f n'est pas dérivable, par contre, il peut se passer des choses nettement plus amusantes.

Corrigé du corrigé : en fait j'ai écrit n'importe quoi ci-dessus, l'antisymétrie n'est pas du tout vraie. Si on suppose les deux inégalités vérifiées, on en déduit que $|f - g_1| = |f - g_2|$ sur un voisinage de a , mais ça n'implique absolument pas $g_1 = g_2$. Si on prend par exemple $f(x) = x$, $g_1(x) = 0$ et $g_2(x) = 2x$, on aura $|f(x) - g_1(x)| = |x|$ et $|f(x) - g_2(x)| = |-x| = |x|$ et pourtant g_1 et g_2 ne sont pas vraiment égales. Ben voilà, je n'aurais pas eu 20 à l'épreuve du CAPES, c'est la honte absolue.

Problème 3 : dérangements

Généralités

1. Difficile de savoir ce qui est exactement attendu derrière ce « justifier ». S'il s'agit simplement de dire qu'on compte deux fois les éléments de $A \cap B$ quand on additionne $|A|$ et $|B|$, c'est facile. Si c'est une vraie démonstration à base de bijections qui est demandée, ça va être nettement plus délicat. On va donc admettre que c'est la première option qui est la bonne.
2. Pas besoin d'illustrer par un schéma quand on peut démontrer la relation à partir de la précédente : $|A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
3. Effectivement, si on applique la formule, les termes correspondant à $k = 1$ donnent $|A_1| + |A_2| + |A_3|$, ceux correspondant à $k = 2$ donnent $-|A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3|$, et l'unique terme pour $k = 3$ est $+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$. Encore une question où on se demande un peu ce qui est attendu comme réponse.

Calcul de nombre de dérangements

4. L'unique permutation de l'ensemble $E_1 = \{1\}$ a un point fixe, donc $d_1 = 0$. Sur les deux permutations de $E_2 = \{1, 2\}$, il y en a une (l'identité) qui a des points fixes, et l'autre (l'échange des deux éléments) qui n'en a pas, donc $d_2 = 1$.
5. Par définition, les permutations appartenant à A_i ont (au moins) un point fixe, donc $A_i \subset S_n \setminus D_n$ (pour tout entier i), et $\cup_{i=1}^n A_i \subset S_n \setminus D_n$. Réciproquement, si une permutation appartient à $S_n \setminus D_n$, elle admet au moins un point fixe i , dont appartient à l'ensemble A_i , et a fortiori à l'union des A_i .
6. L'ensemble $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ est constitué des permutations laissant k entiers fixes, donc ne permutant que les $n - k$ entiers restants de l'ensemble E_n . Il y en a bien $(n - k)!$.
7. Si on applique la formule du crible pour calculer $\left| \sum_{i=1}^n A_i \right|$, la somme intérieure contient $\binom{n}{k}$ cardinaux (le nombre de choix possibles pour les entiers $i_1, i_2, \dots, i_k$), chacun étant égal à $(n - k)!$ d'après la question précédente. La formule en découle immédiatement, puisque $|S_n \setminus D_n| = |S_n| - |D_n| = n! - d_n$.
8. Simplifions la formule précédente en remplaçant bêtement les coefficients binômiaux par leur expression explicite : $d_n = n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = n! \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \right) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ puisque le terme d'indice 0 de cette somme est bien égal à $n!$.

Applications

9. Puisqu'il y a au total $n!$ permutations, on a simplement $p_n = \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. On reconnaît la somme partielle d'une série exponentielle convergeant vers $e^{-1} = \frac{1}{e}$. La limite recherchée existe donc bel et bien, elle est égale à $\frac{1}{e}$ (utile à savoir pour organiser correctement un Secret Santa).
10. (a) En considérant la permutation qui, à chaque entier i compris entre 1 et n , associe le numéro de l'urne dans laquelle est placée la boule i , on aura $X = 0$ si et seulement si la permutation est un dérangement. Toutes les répartitions étant équiprobables, $\mathbb{P}(X_n = 0) = d_n$. On en déduit évidemment $\mathbb{P}(X_n \geq 1) = 1 - d_n$.

- (b) Il s'agit ici de compter le nombre de permutations ayant exactement q points fixes. Pour cela, on choisit ces q points fixes de $\binom{n}{q}$ façons, puis on permute les $n - q$ entiers restants de façon à ne pas avoir de point fixe supplémentaire. Autrement dit, on effectue un dérangement des $n - q$ entiers restants. Le nombre de permutations correspondantes et donc de $\binom{n}{q} \times d_q$, et la probabilité vaut $\mathbb{P}(X_n = q) = \binom{n}{q} \times \frac{d_q}{n!} = \frac{1}{q!(n-q)!} \times (n-q)! \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}$, ce qui est bien la formule de l'énoncé.

- (c) L'espérance se calcule via la formule $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{q=1}^n q \mathbb{P}(X_n = q) = \sum_{q=1}^n \frac{1}{(q-1)!} \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!} =$

$\sum_{q=1}^n \frac{1}{(q-1)!} \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}$. La valeur de cette double somme ne saute pas aux yeux. Essayons plutôt de calculer la différence $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n)$: pour passer du rang n au rang $n+1$, on ajoute à chaque terme déjà présent dans la somme extérieure du rang n un nouveau terme intérieur égal à $\frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!}$. On ajoute également un nouveau terme (celui d'indice n) à la somme extérieure, pour lequel la somme intérieure ne contient qu'un seul terme, donc un nouveau produit égal à $\frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{1}{0!}$. En regroupant tout, on a donc $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \frac{1}{n!} (-1+1)^n = 0$ à l'aide du binôme de Newton. On en déduit que la suite des espérances est constante. Accessoirement, la valeur de cette constante se calcule aisément puisque la variable X_1 est constante égale à 1, donc d'espérance 1. Je remarque une fois ma solution tapée que je n'ai absolument pas utilisé la méthode suggérée par l'énoncé...