Devoir Maison n° 10 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

10 avril 2025

Exercice 1 : étude d'une suite d'intégrales.

1. C'est un calcul classique : $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx = [-\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(2)$.

2. Calculons donc ce qui nous est demandé : $I_{n+2} - I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2}(x) - \sin^n(x)}{\cos(x)}\ dx$ $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)(\sin^2(x)-1)}{\cos(x)}\ dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\ dx = -\left[\frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{n+1} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$. On en déduit évidemment que $I_{n+2} = I_n - \dfrac{(\sqrt{3})^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$. En particulier, pour $n = 1$, on trouve $I_3 = I_1 - \dfrac{3}{8} = \ln(2) - \dfrac{3}{8}$.

3. Il s'agit donc de calculer $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\ dx$. En effectuant le changement de variable $t = \sin(x)$, on aura $dt = \cos(x)\ dx$, et les bornes deviennent 0 et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\ dt$. Une décomposition en élément simples évidente donne $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2(1-t)} + \dfrac{1}{2(1+t)}$, donc $I_0 = \dfrac{1}{2}[-\ln(1-t)+\ln(1+t)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(-\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln((2+\sqrt{3})^2) = \ln(2+\sqrt{3})$.

   En appliquant la formule de la question 2 avec $n = 0$, on a donc $I_2 = I_0 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2+\sqrt{3}) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (non, il n'y aucun espoir d'arriver à écrire ça plus simplement).

4. Sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, on a $0 \leqslant \sin(x) < 1$, donc $\sin^{n+1}(x) \leqslant \sin^n(x)$. Le quotient par $\cos(x)$ qui est strictement positif ne change pas le sens de l'inégalité, et on peut ensuite intégrer pour en déduire $I_{n+1} - I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs minorée par 0 (on intègre toujours des fonctions positives), elle converge.

5. Sur l'intervalle d'intégration, comme on l'a déjà dit à la question précédente, $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\sin^n(x) \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. De plus, $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $\dfrac{1}{\cos(x)} \leqslant 2$, et $\dfrac{\sin^n(x)}{\cos(x)} \leqslant \dfrac{(\sqrt{3})^n}{2^{n-1}}$. Il ne reste plus qu'à intégrer cette constante pour obtenir $I_n \leqslant \dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}^n}{2^{n-1}}$, soit exactement la majoration demandée. Comme $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$, la suite géométrique majorante a une limite nulle, et comme $0 \leqslant I_n$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

6. (a) La suite (S_n) est clairement croissante, puisque $S_{n+1} - S_n = I_{n+1} \geqslant 0$. De plus, en reprenant la majoration obtenue précédemment, $S_n = \sum_{k=0}^{n} I_k \leqslant \frac{2\pi}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \leqslant \frac{2\pi}{3} \times \frac{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \leqslant \frac{4\pi}{3(2-\sqrt{3})}$. La suite (S_n) est convergente et majorée, elle converge (techniquement, on a simplement une série dont le terme général est majoré par celui d'une série géométrique convergente).

(b) C'est en fait un calcul évident exploitant la linéarité de l'intégrale : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^k(x)}{\cos(x)}\, dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k(x)}{\cos(x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)(1-\sin(x))}\, dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)(1-\sin(x))}\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)(1-\sin(x))}\, dx.$

(c) Il suffit de montrer que l'intégrale de droite de la formule précédente a une limite nulle. Or, elle est positive et majorée par $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} dx$, qui tend vers 0 (c'est quasiment le même calcul que pour la majoration de I_n), donc le théorème des gendarmes suffit à conclure.

(d) Comme pour le calcul de la question 3, on écrit $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)(1-\sin(x))}\, dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{(1-\sin^2(x))(1-\sin(x))}\, dx$, et on effectue le changement de variable $t = \sin(x)$ pour obtenir $J = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1-t^2)(1-t)}\, dt$. La décomposition en élements simples est effectivement un peu inhabituelle car on a une racine double : on peut tout de même écrire $\frac{1}{(1-t^2)(1-t)} = \frac{1}{(1+t)(1-t)^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{(1-t)^2}$. En multipliant par $1+t$ puis en évaluant pour $t=-1$, on trouve $a = \frac{1}{4}$. En multipliant par $(1-t)^2$ puis en évaluant pour $t=1$, on a $b+c = \frac{1}{2}$. Enfin, pour $t=0$, on a $1 = a+c$, donc $c = 1-a = \frac{3}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$. Autrement dit, $\frac{bt+c}{(1-t)^2} = \frac{3-t}{4(1-t)^2} = \frac{1-t}{4(1-t)^2} + \frac{2}{4(1-t)^2} = -\frac{1}{4(t-1)} + \frac{1}{2(t-1)^2}$. Il est temps de calculer $J = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{4(t-1)} + \frac{1}{2(t-1)^2}\, dt = \left[\frac{1}{4}\ln(t+1) - \frac{1}{4}\ln(1-t) - \frac{1}{2(t-1)}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}-2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ln((2+\sqrt{3})^2) + (\sqrt{3}+2) - \frac{1}{2} = \ln(\sqrt{2+\sqrt{3}}) + \sqrt{3} + \frac{3}{2}.$

Exercice 2 : théorème de d'Alembert-Gauss.

1. L'ensemble A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ (un module est un réel positif), donc minoré par 0, et certainement non vide (il contient par exemple $|P(0)|$), il admet donc une borne inférieure.
2. Il aurait fallu préciser pour cette question que P est un poynôme non constant. Dans ce cas, on écrit explicitement $P(z) = a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ (avec donc $n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$), et par inégalité

triangulaire, on peut minorer $|P(z)| \geqslant |a_n||z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k$. En notant $r = |z|$, on a donc $|P(z)| \geqslant |a_n|r^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|r^k$. L'expression de notre membre de droite est polynômiale en la variable r, donc est équivalente à son terme dominant, et on peut écrire $|P(z)| \underset{r\to+\infty}{\sim} |a_n|r^n$, et en particulier $\lim_{r\to+\infty} |P(z)| = +\infty$, ce qui est la définition classique de la limite demandée par l'énoncé. En particulier, il existe sûrement un réel $M > 0$ pour lequel, $\forall r \geqslant M$, $|P(z)| \geqslant \alpha+1$ (par exemple...), ce qui assure que notre borne inférieure peut être prise sur l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z| \leqslant M$.

3. En posant par exemple $\varepsilon = \frac{1}{n}$ dans la caractérisation de la borne supérieure, ou peut trouver une suite de nombres complexes (z_n) vérifiant $\alpha \leqslant |P(z_n)| \leqslant \alpha + \frac{1}{n}$. On aura donc en particulier $\lim_{n\to+\infty} |P(z_n)| = \alpha$. Or, la suite (z_n) est bornée, puisqu'en reprenant les calculs effectués dans la question précédente, on a $|P(z_n)| \leqslant \alpha + \frac{1}{n} \leqslant \alpha + 1 \Rightarrow |z_n| \leqslant M$. Toute suite complexe admettant une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass), on peut donc extraire de (z_n) une sous-suite convergeant vers un certain $z_0 \in \mathbb{C}$. Par passage du module à la limite (la fonction $z \mapsto |P(z)|$ est continue), on en déduit que $\alpha = \lim_{n\to+\infty} |P(z_n)| = |P(z_0)|$, ce qui montre bien que la borne inférieure α est atteinte, et qu'il s'agit donc d'un minimum.

4. (a) Par définition, $|P(z + z_0)|$ est minoré par α, donc on a, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|Q(z)| \geqslant 1$. Or, $Q(0) = 1$, donc 1 est un minorant atteint, donc le minimum de $|Q|$.

   (b) Le polynôme $Q - 1$ est de degré n et s'annule en 0, on peut donc l'écrire sous la forme $\sum_{k=p+1}^{n} b_k X^k - b_p X^p$ avec $b_p \neq 0$, il suffit pour celà de définir p comme étant le plus petit entier pour lequel le coefficient de degré p de Q est non nul (avec $p > 0$, puisque $Q(0) = 1$ impose que le coefficient constant de $Q-1$ est nul). Si on veut faire savant, p représente la multiplicité de 0 en tant que racine du polynôme $Q - 1$. En tout cas, la formule demandé en découle trivialement.

   (c) Le q apparaissant dans l'énoncé est une faute de frappe, ça devrait être un p. D'après l'écriture de la question précédente, $Q(re^{-i\frac{\theta}{p}}) = 1 - \rho r^p + \sum_{k=p+1}^{n} b_k r^k e^{\frac{-ik\theta}{p}}$. Par inégalité triangulaire, $\left|Q(re^{-i\frac{\theta}{p}}\right| \leqslant |1 - \rho r^p| + \sum_{k=p+1}^{n} |b_k| r^k$. Quitte à supposer que $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\rho}$ et $r < 1$ si jamais $\frac{1}{\rho} \geqslant 1$, on aura $\rho r^p \leqslant \rho r < 1$, donc $|1 - \rho r^p| = 1 - \rho r^p$ (c'est un réel positif !). Dans ce cas on obtient bien $\left|Q(re^{-i\frac{\theta}{p}})\right| - 1 \leqslant -\rho r^p + \sum_{k=p+1}^{n} |b_k| r^k$. Autrement dit, on peut choisir $r_0 = \min\left(1, \frac{1}{\rho}\right)$.

   (d) Le membre de droite de la majoration précédente est un polynôme en la variable r, qui est donc équivalent en 0 à son terme de plus petit degré, autrement dit à ρr^p. Cette quantité étant strictement négative quand $r \neq 0$, cela prouve qu'au voisinage de 0, $\left|Q(re^{-i\frac{\theta}{p}})\right| - 1 < 0$ (deux quantités équivalentes en un point ont nécessairement le même signe au voisinage de ce point), ce qui est très gênant puisque cela signifie qu'il existe des valeurs de $|Q|$ strictement inférieures à 1 qui est pourtant censé être son minimum. On a atteint une absurdité qui prouve que α ne peut pas être non nul. Autrement dit, $\alpha = 0$, donc

$|P(z_0)| = 0$, ce qui prouve que P admet z_0 pour racine. Pour les curieux, sachez que cette démonstration historique du théorème de d'Alembert-Gauss est due à notre grand copain Cauchy (Euler avait tenté de le démontrer auparavant, mais comme souvent, il vaait lamentablement pipoté !).