

Devoir Maison n° 10

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 10 avril 2025

Exercice 1 : étude d'une suite d'intégrales.

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)} dx$.

1. Calculer la valeur de I_1 .
2. Calculer $I_{n+2} - I_n$, en déduire une relation de récurrence sur les termes de la suite, puis la valeur exacte de I_3 .
3. (question facultative) Si vous êtes très motivés, calculer I_0 et en déduire de même la valeur de I_2 (pour le calcul de I_0 , on pourra s'inspirer de la première question de l'exercice 4 de la feuille d'exercices n° 5).
4. Montrer que la suite (I_n) est monotone, puis qu'elle converge.
5. En majorant brutalement la fonction à intégrer, montrer que $I_n \leq \frac{2\pi}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

En déduire la limite de la suite (I_n) .

6. On pose désormais $S_n = \sum_{k=0}^n I_k$.

- (a) Montrer rigoureusement que la suite (S_n) converge. On notera désormais l sa limite.
- (b) Montrer que $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)(1 - \sin(x))} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)(1 - \sin(x))} dx$.
- (c) En déduire (rigoureusement !) que $l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)(1 - \sin(x))} dx$.
- (d) Calculer explicitement la valeur de l , en commençant par effectuer le changement de variables $t = \sin(x)$ (on risque de tomber sur une intégration de fraction rationnelle un peu inhabituelle pour nous, débrouillez-vous avec !).

Exercice 2 : théorème de d'Alembert-Gauss.

On va démontrer (enfin!) le théorème de d'Alembert-Gauss dans cet exercice, par une méthode faisant essentiellement intervenir du calcul complexe (oui, je sais, ça n'a rien à voir avec ce qu'on fait en ce moment, mais ça vous fera un peu de révisions). Pour cela, on pose donc $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ (polynôme à coefficients éventuellement complexes), et $A = \{|P(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$.

1. Pourquoi l'ensemble A admet-il nécessairement une borne inférieure? On notera cette borne α pour la suite.
2. Montrer que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$ (en donnant un sens précis à ce que signifie cette égalité), en déduire qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\alpha = \inf\{|P(z)| \mid 0 \leq |z| \leq M\}$.
3. Montrer rigoureusement que la borne inférieure de la question précédente est en fait un minimum, atteint en un certain $z_0 \in \mathbb{C}$ (votre grand ami B-W pourrait vous servir ici).
4. On suppose par l'absurde que $\alpha > 0$, et on pose $Q = \frac{P(X + z_0)}{P(z_0)} \in \mathbb{C}[X]$.
 - (a) Montrer que $\inf\{|Q(z)| \mid z \in \mathbb{C}\} = 1$.
 - (b) Montrer que $Q = \sum_{k=p+1}^n b_k X^k - b_p X^p + 1$, pour un certain entier $p \in \{1, \dots, n\}$, et avec $b_p \neq 0$.
 - (c) On note $b_p = \rho e^{i\theta}$ la forme exponentielle du coefficient b_p . Montrer qu'il existe un réel r_0 tel que, $\forall r \leq r_0$, $\left|Q(re^{-i\frac{\theta}{q}})\right| - 1 \leq -\rho r^q + \sum_{k=p+1}^n |b_k| r^k$.
 - (d) En déduire que $\alpha = 0$ et conclure.