Chapitre 7 : Suites numériques

MPSI Lycée Camille Jullian

27 novembre 2023

Toute la suite des hommes doit être considérée comme un même homme.

Blaise Pascal.

Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ». Mais elles se font refouler à l'entrée parce qu'elles convergent !

Ce chapitre consacré à l'étude des suites numériques vise avant tout à mettre en place des définitions précises concernant les limites, qui seront reprises dans un chapitre ultérieur pour les fonctions. On en profitera aussi pour faire un tour d'horizon des principaux types de suites usuelles à connaitre, mais certaines catégories de suites (suites implicites, suites récurrentes) seront étudiées en conjonction avec l'étude de la continuité et de la dérivabilité dans les chapitres correspondants.

Objectifs du chapitre :

- connaitre précisément le vocabulaire sur les suites, et comprendre la signification des différentes définitions des limites
- savoir reconnaître immédiatement une suite classique, et en calculer le terme général sans se tromper
- maîtriser les techniques classiques de calcul de limite et d'étude de suite

1 Compléments sur $\mathbb{R}$.

1.1 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1. L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est appelé **droite achevée** et noté $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque 1. L'ajout de ces éléments est a priori purement arbitraires, mais leur notation n'est bien entendu pas anodine. On peut en fait facilement prolonger à $\overline{\mathbb{R}}$ certaines structures essentielles de l'ensembles des réels :

- on étend l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$ en une relation d'ordre total sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x$, et $x < +\infty$.
- on étend partiellement les opérations usuelles en posant $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + (+\infty) = +\infty$ et $x + (-\infty) = -\infty$, ainsi que $(+\infty) \times (+\infty) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$. Enfin, si $x > 0$, on pose $x \times (+\infty) = +\infty$ et $x \times (-\infty) = -\infty$, alors que, si $x < 0$, on posera $x \times (+\infty) = -\infty$ et $x \times (-\infty) = +\infty$.

- les autres opérations ne sont pas définies, ce sont les classiques « formes indéterminées » $0 \times (+\infty)$, $0 \times (-\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$.

Proposition 1. Tout sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Démonstration. C'est en fait évident. Si l'ensemble contient $+\infty$ ou n'est pas majoré, alors cette valeur constitue sa borne supérieure. Sinon, on est ramenés au théorème classique énoncé dans un chapitre précédent. La situation est complètement symétrique pour la borne inférieure. □

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 2. Les **intervalles** sont tous les sous-ensembles de $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont d'un des quatre types suivants, avec $a < b$ deux élément de la droite achevée :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervalle fermé)
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ (intervalle semi-ouvert)
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ (intervalle semi-ouvert)
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle ouvert)

Remarque 2. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les intersections avec $\mathbb{R}$ de tous ces intervalles. On retrouve les types d'intervalles classiques : $\mathbb{R}$ tout entier, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, ainsi que les quatre types d'intervalles bornés dont la forme est identique à celle décrite dans la définition qui précède.

Proposition 2. Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, $\forall (x, y) \in A^2$, $]x, y[\subset A$.

Démonstration. La démonstration n'est pas difficile mais pénible à rédiger et sans aucun intérêt, nous nous en dispenserons. □

Définition 3. Un **voisinage** d'un réel a est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ tel que, $\exists \varepsilon > 0$, $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$.
Un **voisinage** de $+\infty$ est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ tel que, $\exists A \in \mathbb{R}$, $]A, +\infty[\subset V$.
Un **voisinage** de $-\infty$ est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ tel que, $\exists A \in \mathbb{R}$, $]-\infty, A[\subset V$.

Proposition 3. Propriétés des voisinages dans $\mathbb{R}$:

- L'intersection de deux voisinages d'un même réel a est un voisinage de a.
- Si a et b sont deux réels distincts, il existe un voisinage V_a de a et un voisinage V_b de b tels que $V_a \cap V_b = \emptyset$.
- Un intervalle ouvert est voisinage de chacun de ses points.

Démonstration. Tout est facile : pour la première propriété, on prend le plus petit des deux ε donnés par la définition de voisinage, et l'intervalle correspondant sera inclus dans les deux voisinages, donc dans leur intersection. Ensuite, en supposant par exemple $a < b$, il suffit de poser $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$, puis de prendre $V_a =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, et $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$. Le principe est le même pour la dernière propriété : si $x \in]a, b[$, on pose $\varepsilon = \min(x - a, b - x)$, qui est un réel strictement positif, et l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ est par construction inclus dans $]a, b[$. □

Remarque 3. Ces définitions sont en fait un avant-goût d'un nouveau domaine des mathématiques que vous découvrirez plus en détail l'an prochain : la **topologie**, qui consiste à étudier de façon fine les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et plus généralement de ce qu'on appelle les espaces vectoriels normés. Ces définitions ont en fait un lien très étroit avec la notion de continuité (autant au sens de continuité dans $\mathbb{R}$: un sous-ensemble est « continue » s'il ne comporte pas de « trous » que de continuité des fonctions). Quelques termes de vocabulaire supplémentaires hors-programme pour mieux comprendre les choses :

- un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est **ouvert** s'il est voisinage de chacun de ses points (c'est donc le cas des intervalles ouverts, d'où leur nom).
- un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est **fermé** si son complémentaire est un ouvert.
- un réel x est **intérieur** à un sous-ensemble A si A est un voisinage de x. On note $\mathring{A}$ l'ensemble de tous les points intérieurs à A (aussi appelé intérieur de l'ensemble A).
- un réel x est **adhérent** à un sous-ensemble A si, pour tout voisinage V_x de x, $V_x \cap A \neq \emptyset$. On note $\overline{A}$ (rien à voir avec un complémentaire !) l'ensemble des points adhérents à l'ensemble A (aussi appelé adhérence de l'ensemble A).
- on appelle enfin **frontière** de A l'ensemble $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$.

Par exemple, 1 est adhérent à l'intervalle $[0, 1[$ (il est « au bord » de l'intervalle), et tout réel est adhérent à $\mathbb{Q}$, comme on va le voir dans le paragraphe suivant. Par contre, aucun réel n'est intérieur à $\mathbb{Q}$ (puisque $\mathbb{Q}$ ne contient aucun intervalle ouvert). Notons qu'un ensemble ouvert est toujours égal à son propre intérieur et qu'un ensemble ouvert est égal à sa propre adhérence (c'est même une caractérisation des ouverts et des fermés). Plus généralement, $\mathring{A}$ est toujours le plus grand ouvert inclus dans A, et $\overline{A}$ le plus petit fermé dans lequel A est inclus.

1.3 Sous-ensembles denses de $\mathbb{R}$.

Définition 4. Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si, quel que soit l'intervalle ouvert I, $I \cap A \neq \emptyset$.

Autrement dit, un sous-ensemble A est dense dans $\mathbb{R}$ si tout réel est adhérent à A.

Théorème 1. Les sous-ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert. Le réel $b - a$ étant strictement positif, il existe un entier k tel que $k(b-a) > 1$. Alors $ka < \mathrm{Ent}(ka)+1 \leqslant ka+1 < kb$, donc $\dfrac{\mathrm{Ent}(ka) + 1}{k}$ est un nombre rationnel qui appartient à $]a, b[$. Cela prouve la densité de $\mathbb{Q}$. Montrons que le même intervalle $]a, b[$ contient également un nombre irrationnel. Pour cela, appliquons le résultat précédent à l'intervalle $\left]\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right[$, qui contient un rationnel $\dfrac{p}{q}$. Mais alors $\dfrac{p\sqrt{2}}{q} \in]a, b[$, et ce nombre est irrationnel. □

2 Généralités sur les suites.

2.1 Vocabulaire.

Définition 5. Une **suite** d'élements d'un ensemble E est une application $u : \mathbb{N} \to E$. On note habituellement u_n l'image par une telle application de l'entier n, aussi appelé **terme d'indice** n de la suite et on désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire la suite elle-même. On parle également de suite de **terme général** u_n lorsqu'on donne l'expression de u_n en fonction de n.

On peut définir une suite réelle de bien des façons, les plus fréquentes étant les suivantes :

- en donnant une formule explicite pour le terme général, par exemple $u_n = n^2 - 4n + 1$. C'est une définition qui ressemble beaucoup à la définition usuelle d'une fonction, et qui est extrêmement pratique pour les calculs. C'est celle qu'on cherchera à obtenir le plus souvent.
- on pourra (rarement) se contenter de donner la liste explicite des premiers termes de la suite quand la formule qui en découle est « évidente » mais c'est une façon peu rigoureuse de définir une suite. Par exemple $u_0 = 2$, $u_1 = 4$, $u_2 = 6$, $u_3 = 8$, $u_4 = 10$, on devine que la suite décrite est celle dont le terme général vaut $u_n = 2(n+1)$.
- un cas très fréquent est le cas de la définition par récurrence. Elle consiste à donner une relation de récurrence entre les termes de la suite, c'est-à-dire à exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, et à préciser la valeur de u_0 (sinon, c'est comme pour une récurrence non initialisée, ça ne sert à rien). Par exemple, $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5$. C'est beaucoup moins pratique pour les calculs qu'une définition explicite, mais c'est souvent la définition la plus naturelle que nous aurons d'une suite. Il peut arriver qu'une suite soit définie par récurrence double (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n), auquel cas il faut préciser les valeurs de u_0 et u_1, voire par récurrence triple ou pire (mais c'est plus rare !). On croisera déjà beaucoup de suites récurrentes dans ce chapitre, mais une étude plus poussée de ce type de suite (exploitant des outils classiques faisant intervenir des fonctions) sera proposée dans le chapitre sur la dérivation.
- enfin, la suite peut être définie de façon implicite, c'est-à-dire que u_n est décrit comme vérifiant une propriété mathématique qui ne rend pas possible le calcul explicite de la valeur (typiquement comme solution d'une équation qu'on ne sait pas résoudre de façon exacte). Par exemple, si u_n est l'unique réel positif vérifiant $e^{u_n} - u_n - 2 = n$ (croyez-moi sur parole, il y en a un et un seul pour chaque valeur de n), on ne peut pas trouver de formule explicite. Pas vraiment pratique pour les calculs, mais on arrive quand même à étudier la suite à l'aide d'études de fonctions. Nous reparlerons de ce type de suites dans le chapitre consacré à la continuité.

Définition 6. Une suite réelle (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$, je vous fais grâce des définitions de croissance et décroissance stricte). Une suite réelle est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

Exemple : Une technique classique pour étudier le sens de variation d'une suite est de calculer $u_{n+1} - u_n$ et de déterminer son signe. Prenons la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 2$, alors $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2 > 0$, donc la suite est strictement croissante.

Définition 7. Une suite (u_n) est **majorée** (resp. **minorée**) par un réel m si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant m$ (resp. $u_n \geqslant m$). Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

2.2 Suites classiques.

Définition 8. Une **suite arithmétique** de raison $r \in \mathbb{R}$ est une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 4. La suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 + nr$.
- monotonie : si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ; si $r < 0$, elle est strictement décroissante.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \dfrac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 + nr$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 + 0 \times r$, et en le supposant vrai au rang n, on a par définition $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Cela découle de façon immédiate de la constatation que $u_{n+1} - u_n = r$.
- $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + kr = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + r \sum_{k=0}^{k=n} k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2u_0 + nr))(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_0 + nr)(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$. On a réutilisé pour ce calcul la formule pour la somme des entiers vue plus tôt dans l'année.

□

Définition 9. Une **suite géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$ est une suite vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Proposition 5. La suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- monotonie : si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ; si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, elle est strictement décroissante (si $u_0 < 0$, c'est le contraire). Si $q < 0$, les termes de la suite sont de signe alterné.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 \times q^n$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 \times q^0$, et en le supposant vrai au rang n, on a par définition $u_{n+1} = u_n \times q = u_0 \times q^n \times q = u_0 \times q^{n+1}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 q^n (q - 1)$. Toues les résultats concernant le sens de variation en découlent.
- $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 \times q^k = u_0 \sum_{k=0}^{k=n} q^k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

□

Définition 10. Une suite réelle (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels $a \notin \{0, 1\}$ et $b \neq 0$ tels qu'elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Définition 11. L'**équation de point fixe** associée à une relation de récurrence arithmético-géométrique est l'équation $x = ax + b$.

Remarque 4. L'équation de point fixe porte ce nom car elle revient à chercher une valeur réelle x telle que la suite constate égale à x soit solution de la relation de récurrence. Autrement dit, si $u_0 = x$, la suite (u_n) verra toutes ses valeurs rester fixes et égales à x.

Théorème 2. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique et α l'unique solution de l'équation de point fixe associée. Alors la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = x_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a.

Démonstration. L'existence et l'unicité du réel α découlent du fait qu'on a imposé $a \neq 1$ dans la définition d'une suite arithmético-géométrique. Remarquons ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n - a\alpha = a(u_n - \alpha) = av_n$.
La suite (v_n) est donc géométrique de raison a. $\square$

Remarque 5. On déduit du théorème précédent que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \alpha = v_0 \times a^n + \alpha = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$, ce qui donne une expression explicite du terme de u_n. En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

- calcul du point fixe α.
- définition de la suite (v_n).
- vérification que (v_n) est suite géométrique (on refait le calcul à chaque fois).
- conclusion : expression du terme général u_n.

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$. L'équation de point fixe de la suite est $x = 3x - 4$, qui a pour unique solution $x = 2$, on pose donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. On remarque que $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^{n+1}$, donc $u_n = v_n + 2 = 3^{n+1} + 2$.

Remarque 6. La méthode de résolution employée pour les suites arithmético-géométriques est en fait extrêmement similaire à ce qu'on a déjà vu dans un chapitre précédent pour les équations différentielles linéaires du premier ordre. En identifiant le « décalage d'indice » à une dérivation, on fait effectivement les calculs suivants :

- la recherche du point fixe est similaire à une recherche de solution particulière.
- la suite (v_n) représente une solution de « l'équation homogène associée » $u_{n+1} = au_n$.

En pratique, on ne cherche qu'une solution particulière de la relation de récurrence (puisque la connaissance de u_0 revient à imposer une condition initiale, et donc à résoudre un « problème de Cauchy »). Mais si on veut écrire toutes les suites vérifiant la relation $u_{n+1} = au_n + b$, on obtiendra des formules explicites du type $u_n = K \times a^n + \alpha$ avec $K \in \mathbb{R}$, autrement dit exactement « les solutions de l'équation homogène plus une solution particulière ». On pourrait d'ailleurs adapter les méthodes de résolution d'équations différentielles à des récurrences du premier ordre plus complexes que les suites arithmético-géométriques (avec un « second membre » autre que constant notamment).

Définition 12. Une suite réelle est **récurrente linéaire d'ordre** 2 si elle vérifie une relation de récurrence double linéaire à coefficients constants, c'est-à-dire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont deux réels non nuls.

Définition 13. L'**équation caractéristique** associée à une récurrence linéaire d'ordre 2 est l'équation du second degré $x^2 = ax + b$.

Remarque 7. On va retrouver une fois de plus des techniques rappelant furieusement les résolutions d'équations différentielles (du second ordre cette fois-ci, ce qui est bien sûr cohérent pour une suite récurrente double). Là aussi, on pourrait généraliser les résultats présentés dans ce cours à des « récurrences linéaires d'ordre 2 avec second membre » mais ces équations plus compliquées ne sont pas au programme.

Théorème 3. Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée.

- si $\Delta > 0$, il existe deux constantes réelles A et B telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ax_1^n + Bx_2^n$, où x_1 et x_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation caractéristique.
- si $\Delta = 0$, il existe deux constantes réelles A et B telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (A + Bn)x_0^n$, où x_0 est la solution double de l'équation caractéristique.
- si $\Delta < 0$, il existe deux constantes réelles A et B telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))r^n$, où les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique ont pour forme exponentielle $x = re^{\pm i\theta}$.

Exemple : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$. Cette suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x + 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$, et admet pour racines $x_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ et $x_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$. Aucune difficulté pour mettre ces racines sous forme exponentielle, elles sont égales à $\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$. Il existe donc deux constantes réelles A et B telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(A\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + B\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) \times \sqrt{2}^n$. On exploite la connaissance des deux premiers termes de la suite pour déterminer les valeurs des constantes : $u_0 = 2$ implique $A = 2$ et $u_1 = 4$ se traduit par $\left(A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \sqrt{2} = 4$, soit $A + B = 4$ et donc $B = 2$. Finalement, $u_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \times 2^{1+\frac{n}{2}}$. Par exemple, $u_5 = -\sqrt{2} \times 2^{\frac{7}{2}} = -16$ et $u_6 = -2^4 = -16$. On peut le vérifier en explicitant les premiers termes de la suite : $u_2 = 8 - 4 = 4$, $u_3 = 8 - 8 = 0$, $u_4 = 0 - 8 = -8$, $u_5 = -16$, $u_6 = -32 + 16 = -16$.

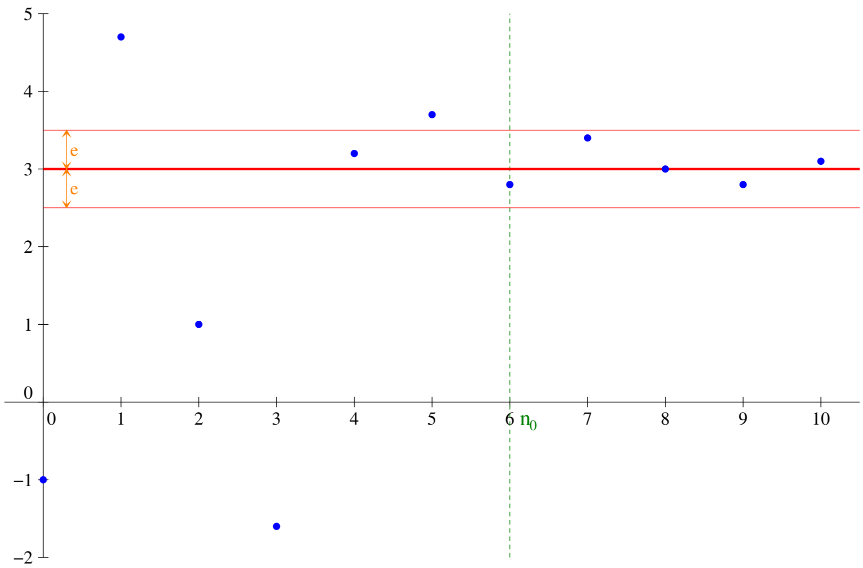
Exemple : Concluons cette partie avec un exemple extrêmement classique, la suite de Fibonacci. Celle-ci est définie par les conditions suivantes : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Il s'agit là aussi d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et admet pour racines $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ (le fameux nombre d'or) et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi$ (qui est l'opposé de l'inverse de φ). On en déduit que $u_n = A\varphi^n + B\psi^n$. Les conditions initiales imposent $u_0 = 1 + B = 0$ et $u_1 = A\varphi + B\psi = 1$, donc $A = \frac{1}{\varphi - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $B = -A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Finalement, $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$. Formule surprenante dans la mesure où tous les termes de la suite sont manifestement entiers, mais tout à fait exacte !

3 Convergence de suites.

3.1 Limites finies.

Définition 14. Une suite réelle (u_n) a pour **limite** $l \in \mathbb{R}$ si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. Toute suite ayant une limite finie l est appelée suite **convergente**. Sinon, la suite est dite **divergente** (même si elle peut avoir une limite infinie).

Rappelons que $|u_n - l| < \varepsilon$ signifie que la distance entre u_n et l est inférieure à ε (ou encore $u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$). Autrement dit, aussi petite que soit la distance imposée au réel l (c'est-à-dire aussi proche de 0 que soit ε dans notre définition), les valeurs de la suite vont finir par être **toutes** à une distance inférieure de l, à condition qu'on attende suffisamment longtemps (jusqu'à n_0). Sur la figure ci-dessous, on a $l = 3$, et pour $\varepsilon = 0.5$ (noté e sur la figure), $n_0 = 6$.



Méthode : Pour prouver à l'aide de cette définition qu'une suite donnée converge vers un certain réel (ce qu'on fera heureusement assez rarement, mais il est important de bien comprendre les mécanismes cachés derrière le formalisme), on procède ainsi :

- On fixe ε à une valeur strictement positive quelconque.
- On calcule $|u_n - l|$, et on écrit l'inégalité $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
- On cherche à transformer cette inégalité en une condition du type $n \geqslant n_0$ (où n_0 sera naturellement une quantité dépendant de ε).

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \dfrac{n+3}{n+2}$, et prouvons rigoureusement que sa limite est égale à 1. Soit $\varepsilon > 0$, alors $|u_n - 1| = \left|\dfrac{n+3}{n+2} - 1\right| = \left|\dfrac{n+3-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\dfrac{1}{n+2}\right| = \dfrac{1}{n+2}$. L'expression étant positive, il suffit de déterminer pour quelles valeurs de n on a $\dfrac{1}{n+2} \leqslant \varepsilon$, ce qui nous donne $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 2$. On peut donc choisir $n_0 = \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 2\right) + 1$ (il faut que ce n_0 soit un entier, d'où l'ajout de la partie entière et du $+1$ un peu artificiels dans la formule. Remarquez que, en tout logique, plus ε est proche de 0, plus n_0 devient grand. Ainsi, si on veut que la distance à la limite devienne inférieure ou égale à 0.1 (u_n est une valeur approchée de sa limite à un chiffre après la virgule), il faut attendre le terme d'indice $n_0 = 9$. Si on veut trois chiffres après la virgule (distance inférieure à 0.001), il faudra attendre l'indice $n_0 = 999$.

Remarque 8. Le fait qu'une suite converge vers une limite l est équivalent à avoir $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - l = 0$.

Proposition 6. Si (u_n) est une suite convergente, alors sa limite l est unique.

Démonstration. Nous allons recourir à un raisonnement par l'absurde pour démontrer cette proposition (comme très souvent lorsqu'il s'agit de prouver une unicité). Supposons donc que le résultat énoncé est faux, c'est-à-dire qu'une même suite (u_n) admet deux limites distinctes l et l', et notons par exemple l' la plus grande des deux. Appliquons donc la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{l'-l}{3}$: on peut donc trouver d'une part un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, et d'autre part un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \in [l'-\varepsilon, l'+\varepsilon]$. Mais alors, dès que $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a

$u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon] \cap [l'-\varepsilon, l'+\varepsilon]$, ce qui est très gênant puisque cette intersection est vide d'après la définition de ε (en effet, $l+\varepsilon < l'-\varepsilon$). Conclusion, l'hypothèse effectuée était absurde, et une suite ne peut pas avoir deux limites différentes. □

Proposition 7. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Appliquons la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = 1$. On obtient un entier n_0 tel que, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in [l-1, l+1]$. Par ailleurs, les termes de la suite d'indice inférieur à n_0 sont en nombre fini, il en existe donc un qui est le plus grand (notons sa valeur M) et un qui est le plus petit (on va le noter m). Il est alors facile de constater que la suite est minorée par $\min(m, l-1)$ et majorée par $\max(M, l+1)$. □

Définition 15. Une **sous-suite** d'une suite (u_n) (aussi appelée **suite extraite**) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Les sous-suites que nous manipulerons le plus souvent sont les sous-suites de la forme (u_{2n}) (on ne garde que les termes d'indice pair de la suite), (u_{2n+1}) (on garde les termes d'indice impair), u_{3n}, etc.

Proposition 8. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers une limite l. Alors toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) converge vers cette même limite l.

Démonstration. C'est évident. Si on fixe un $\varepsilon > 0$, on peut trouver un n_0 à partir duquel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$, et l'application φ étant strictement croissante, on aura a fortiori $|u_{\varphi(n)} - l| \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant n_0$. □

Remarque 9. La réciproque de cette proposition est évidemment fausse. Un contre-exemple classique (qui est aussi un contre-exemple à la réciproque de la proposition sur le caractère borné des suites convergentes) est la suite définie par $u_n = (-1)^n$. Pour cette suite, la suite extraite (u_{2n}) a pour limite 1 puisqu'elle est constante, la suite (u_{2n+1}) converge quant à elle vers -1, et (u_n) n'est pas convergente.

Proposition 9. Si les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) d'une suite (u_n) convergent vers une même limite l, alors (u_n) converge vers l.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un entier n_0 et un entier n_1 à partir desquels on aura respectivement $|u_{2n} - l| \leqslant \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - l| \leqslant \varepsilon$. Si $n \geqslant \max(2n_0, 2n_1+1)$, u_n est de la forme $2p$ (s'il est pair) ou $2p+1$ (s'il est impair) pour un entier $p \geqslant \max(n_0, n_1)$, donc on aura $\forall n \geqslant \max(2n_0, 2n_1+1)$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que (u_n) converge vers l. □

Théorème 4. Théorème de Bolzano-Weierstraß.
De tout suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. La preuve classique de ce théorème utilise le principe de dichotomie. Notons donc a_0 un minorant de la suite (u_n) et b_0 un majorant de cette même suite. On va construire, par récurrence, deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante : on note $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, et dans le cas où l'intervalle $[a_n, c_n]$ contient une infinité de termes de la suite on conserve $a_{n+1} = a_n$ et on pose $b_{n+1} = c_n$. Dans le cas contraire, l'intervalle $[c_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (par construction, il y en avait une infinité dans l'intervalle $[a_n, b_n]$) et on pose dans ce cas $a_{n+1} = c_n$, en conservant $b_{n+1} = b_n$. Ainsi, on a toujours une infinité de termes de la suite dans l'intervalle $[a_n, b_n]$, et par construction, la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) décroissante, et on a toujours $a_n \leqslant b_n$. Les deux suites sont donc convergentes ((a_n) est majorée par b_0, (b_n) est minorée par a_0). De plus, toujours par construction, on a toujours $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$, ce qui prouve que $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et donc converge vers 0. Par conséquent, les deux suites (a_n) et (b_n) ont une limite commune l. Comme chaque intervalle $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n) il est facile de construire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$ (on prend simplement, parmi l'infinité de termes disponibles, le premier dont l'indice est supérieur à tous ceux déjà utilisés dans les intervalles précédents). Le théorème des gendarmes, que nous redémontrerons plus bas, permet alors de conclure que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge. □

Théorème 5. Théorème de convergence monotone :
Toute suite décroissante et minorée converge. De plus, sa limite l est la borne inférieure des termes de la suite. Toute suite croissante et majorée converge. La limite de la suite est alors la borne supérieure des termes de la suite.

Démonstration. Traitons le cas de la suite croissante majorée. L'ensemble des termes de la suite étant non vide et majoré, il admet une borne supérieure l. D'après la caractérisation de la borne supérieure, on sait que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $l - \varepsilon < u_{n_0}$. Or, la suite est croissante et majorée par l, donc on aura, $\forall n \geqslant n_0$, $l - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant l$. C'est exactement la définition de la limite d'une suite. □

Remarque 10. Attention ! Une suite croissante et majorée par un réel M ne converge pas nécessairement **vers M**. La suite a tout un paquet de majorants, dont un seul est sa limite.

Exemple : Considérons la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Il est très facile de se convaincre que la suite est croissante : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ (on additionne de plus en plus de termes strictement positifs). Mais majorer la suite est nettement plus compliqué. Une façon rapide de le faire est décrire que $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)}$ lorsque $k \geqslant 2$. Or, $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ (un cas vraiment facile de décomposition en éléments simples). En isolant le premier terme de la somme et en constatant un télescopage, on peut alors écrire $u_n \leqslant 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$. La suite est donc majorée par 2 (il est important que le majorant soit constante, on ne peut par exemple pas garder $2 - \dfrac{1}{n}$ comme majorant pour appliquer le théorème), et nécessairement convergente. Par contre, le théorème ne donne absolument pas la valeur de la limite. En l'occurrence, cette dernière est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$ et ne peut pas se calculer pas des méthodes simples.

Démonstration. Nouvelle preuve du théorème de Bolzano-Weierstraß.

Soit donc (u_n) une suite bornée. Notons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geqslant n,\ u_n \geqslant u_p\}$. Deux possibilités : soit l'ensemble est fini, soit il est infini. Si A est infini, on considère la sous-suite contenant tous les termes de (u_n) dont l'indice appartient à A. Cette sous-suite est par construction décroissante puisque chacun de ses termes est plus grand que tous les termes suivants dans la suite (u_n). Comme ladite sous-suite est par ailleurs minorée puisque (u_n) est bornée, elle converge d'après le théorème de convergence monotone. Si A est infini, considérons un n_0 plus grand que le plus grand élément de A. Puisque $n_0 \notin A$, il existe certainement un entier $n_1 > n_0$ pour lequel $u_{n_1} > u_{n_0}$. De même, $n_1 \notin A$, donc on peut trouver un entier n_2 tel que $u_{n_2} < u_{n_1}$. On construit ainsi terme à terme une sous-suite croissante de (u_n). Cette sous-suite étant majorée, elle converge. Remarquons qu'on a en fait démontré le résultat suivant : de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone. □

3.2 Limites infinies.

Définition 16. Une suite réelle (u_n) **diverge vers** $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$. On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. De même, une suite réelle (u_n) **diverge vers** $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant A$. On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = n^2$ et montrons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Comme pour le cas d'une limite finie, on commence pour celà par fixer la valeur de A. Constatons ensuite que $u_n > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ (si $A \geqslant 0$; mais si $A < 0$, il n'y a pas vraiment de souci puisque dans ce cas u_n est toujours supérieur à A). On peut donc choisir $n_0 = \text{Ent}(\sqrt{A}) + 1$, et on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 10. Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Cette dernière hypothèse signifie que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n_0} > A$. Mais la suite étant croissante, on a en fait $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant A$, ce qui prouve exactement la divergence vers $+\infty$. Inutile de refaire quoi que ce soit pour le deuxième cas : si (v_n) est décroissante non minorée, alors $(-v_n)$ est croissante non majorée, et on se ramène au cas précédent. □

3.3 Opérations et limites.

Proposition 11. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite éventuelle de leur somme $(u_n + v_n)$ est donnée par le tableau suivant (f.i. signifiant « forme indéterminée » pour les cas où ne peut pas connaitre avec certitude la valeur de la limite, et où cette limite peut même ne pas exister) :

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	l+l'	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	f.i.
$-\infty$	$-\infty$	f.i.	$-\infty$

Remarque 11. On aurait pu alléger ce tableau, comme ceux qui vont suivre, en donnant des valeurs de limites appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$, ce qui a l'avantage de ne donner qu'une seule formule pour les opérations de base. Mais les démonstrations sont plus difficiles à unifier sans « tricher » et exploiter des propriétés des voisinages que nous n'avons pas énoncées.

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où les deux suites ont une limite finie, notée respectivement l et l'. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in \left[l - \frac{\varepsilon}{2}, l + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ (oui, la division par 2 est volontaire, après tout $\frac{\varepsilon}{2}$ est un réel strictement positif auquel on peut appliquer la définition de la limite), et un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $v_n \in \left[l' - \frac{\varepsilon}{2}, l' + \frac{\varepsilon}{2}\right]$. En notant $N = \max(n_0, n_1)$, on obtient alors en ajoutant les deux encadrements (ou en utilisant l'inégalité triangulaire si on a travaillé avec des valeurs absolues) $\forall n \geqslant N$, $u_n + v_n \in [l + l' - \varepsilon, l + l' + \varepsilon]$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n = l + l'$. Les autres cas se démontrent de façon similaire et ne présentent pas de grosse difficulté, c'est simplement très pénible. □

Proposition 12. Soit (u_n) une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n = \pm\infty$ (le signe dépendant du signe de la limite de (u_n) et de celui de λ suivant la règle des signes).

Démonstration. Prouvons le cas où la limite est finie. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ (c'est la même astuce que pour la démonstration de la limite d'une somme), donc pour $n \geqslant n_0$, $|\lambda u_n - \lambda l| < \varepsilon$, ce qui prouve bien que $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Le cas des limites infinies est très similaire. □

Proposition 13. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite éventuelle de leur produit $(u_n v_n)$ est donnée par le tableau suivant :

$\lim v_n$ / $\lim u_n$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	ll'	ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	f.i.	f.i.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	f.i.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	f.i.	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration. Commençons par prouver le cas où les deux suites ont pour limite 0, et considérons $\varepsilon > 0$. Il existe deux réels n_0 et n_1 tels que, respectivement, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$, et $\forall n \geqslant n_1$, $|v_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. On en déduit que $\forall n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $|u_n v_n| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Supposons désormais que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - l) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - l') = 0$, donc en utilisant ce qu'on vient juste de démontrer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - l)(v_n - l') = 0$. Or, $(u_n - l)(v_n - l') = u_n v_n - l v_n - l' u_n + ll'$, ou encore $u_n v_n = (u_n - l)(v_n - l') + l v_n + l' u_n - ll'$. D'après les propositions démontrées auparavant (limite d'une somme et d'un produit par un réel), on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 0 + ll' + l'l - ll' = ll'$. □

Définition 17. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ lorsque la suite (u_n) tend vers 0 en étant strictement positive à partir d'un certain rang. De même, on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$ si (u_n) est strictement négative à partir d'un certain rang.

Proposition 14. Soit (u_n) une suite réelle qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang, et ayant une limite, alors la limite de $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est donnée par le tableau suivant :

$\lim u_n$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \left(\frac{1}{u_n}\right)$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$. Soit $A > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \frac{1}{A}$. Quitte à changer la valeur de n_0 pour atteindre le rang à partir duquel (u_n) est positive et ne s'annule plus, on a même $0 < u_n \leqslant \frac{1}{A}$, d'où $\frac{1}{u_n} \geqslant A$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$. $\square$

Proposition 15. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite éventuelle de leur quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est donnée par le tableau suivant :

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$l' > 0$	$l' < 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$l < 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+
0^+	0	0	f.i.	f.i.	0	0
0^-	0	0	f.i.	f.i.	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	f.i.	f.i.
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	f.i.	f.i.

Démonstration. Pas besoin de preuve, puisqu'un quotient n'est rien d'autre que le produit par un inverse. $\square$

Remarque 12. Il existe un dernier cas de forme indéterminée moins classique que ceux rappelés dans les propriétés précédentes : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on ne peut pas conclure pour la limite éventuelle de $u_n^{v_n}$. En particulier, il n'y a aucune raison, si la limite existe, pour qu'elle soit égale à 1. Un exemple classique : on cherche la limite de $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pour la déterminer, on passe sous forme exponentielle, ou plus simplement on compose par un logarithme : $\ln(a_n) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. On se rappelle alors de la limite classique de taux d'accroissement $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on peut appliquer cette limite avec $x = \frac{1}{n}$ pour obtenir exactement $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n) = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e$.

3.4 Limites classiques.

Proposition 16. Une suite arithmétique de raison r diverge vers $+\infty$ si $r > 0$, et diverge vers $-\infty$ si $r < 0$.

Démonstration. On peut revenir simplement à la définition (dans le cas où $r > 0$ par exemple) : si A est un réel quelconque, $u_n \geqslant A$ se produit dès que $u_0 + nr \geqslant A$, soit $n \geqslant \dfrac{A - u_0}{r}$ (pas de changement de sens de l'inégalité quand on divise par r), et on conclut sans difficulté. Dans le cas où $r < 0$, l'inégalité change de sens quand on divise par r et la conclusion est tout aussi facile. $\square$

Proposition 17. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- si $q > 1$, la suite diverge vers $\pm\infty$ selon le signe de u_0.
- si $q = 1$, la suite est constante et converge bien sûr vers u_0.
- si $-1 < q < 1$ (ou si on préfère si $|q| < 1$), la suite converge vers 0.
- si $q = -1$, la suite est périodique (de période 2) et n'admet pas de limite.
- si $q < -1$, la suite n'admet pas de limite, mais sa valeur absolue diverge vers $+\infty$.

Démonstration. Commençons par le cas où $q > 1$, et notons $r = q - 1$, on peut alors écrire $u_n = u_0(1 + r)^n$. Or, quel que soit l'entier naturel n et le réel positif r, on a $(1 + r)^n \geqslant 1 + nr$ (ce qui se démontre au choix par récurrence, ou en écrivant la formule du binôme de Newton pour le développement de $(1 + r)^n$ et en constantant que les deux premiers termes de ce développement donnent $1 + nr$, et que tout ce qui suit est positif). La suite $(1 + nr)$ étant une suite arithmétique de raison strictement positive, elle diverge vers $+\infty$, donc $(1 + r)^n$ également (on utilise un peu les résultats de comparaison du paragraphe suivant pour conclure ceci). On conclut ensuite facilement en utilisant les limites du produit d'une suite par un réel.

En fait, on peut ramener le cas où $0 < q < 1$ au premier en considérant simplement l'inverse de la suite (u_n), qui sera géométrique de raison $\dfrac{1}{q}$ et divergera donc vers $\pm\infty$. L'inverse d'une suite de limite infinie a bien une limite nulle. De même, si $q < -1$, il suffit de considérer $|v_n|$, qui est une suite géométrique de raison $|q| > 1$ et diverge donc vers $+\infty$. La suite (v_n) changeant tout le temps de signe si $q < 0$, elle ne peut avoir de limite. Par contre, si $-1 < q < 0$, en passant encore une fois à l'inverse, on déduira comme tout à l'heure que $|v_n|$ tend vers 0, ce qui est équivalent à dire que v_n tend vers 0. $\square$

Proposition 18. Croissances comparées sur les suites.

- $\forall a > 1$, pour tout polynôme P, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{P(n)}{a^n} = 0$
- $\forall a > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!}{a^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^n}{n!} = +\infty$

Démonstration. Une simple idée de preuve pour le deuxième résultat énoncé : en notant $u_n = \frac{n!}{a^n}$, la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang. En effet, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \times \frac{a^n}{n!} = \frac{n+1}{a}$, qui sera supérieur à 1 quand $n > a$ (tous les termes de la suite sont positifs). Il y a donc deux possibilités : soit la suite (u_n) est majorée et convergente, soit elle ne l'est pas et diverge vers $+\infty$. Mais, si la suite était convergente, on aurait $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, ce qui n'est manifestement pas le cas. Elle tend donc nécessairement vers $+\infty$. □

3.5 Inégalités et limites.

Proposition 19. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant repectivement vers l et l' et telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $l \leqslant l'$.

Démonstration. Petit raisonnement par l'absurde : supposons $l > l'$ et posons $\varepsilon = \frac{l - l'}{3}$, alors à partir d'un certain rang on aura $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ et $v_n \in [l' - \varepsilon, l' + \varepsilon]$. Mais comme $l' + \varepsilon < l - \varepsilon$ (par construction de ε), ceci est incompatible avec le fait que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. L'hypothèse est donc absurde et $l \leqslant l'$. □

Remarque 13. Cette proposition est souvent utilisée sous la forme plus simple où l'une des deux suites est constante. Ainsi, si (u_n) converge et que $u_n \leqslant A$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant A$. Notamment, la limite d'une suite de signe constant est de même signe que la suite.

Remarque 14. L'inégalité sur la limite est toujours large, même si on a une inégalité stricte entre u_n et v_n. Par exemple, $\forall n \geqslant 1$, $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n^2}$, mais ces deux suites ont la même limite.

Théorème 6. Théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement si vous voulez faire plus sérieux).
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$, alors la suite (w_n) converge également, et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, alors à partir d'un certain rang, on aura $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ et $|v_n - l| \leqslant \varepsilon$. Autrement dit, u_n et v_n appartiennent tous deux à l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. Mais alors w_n, qui se situe entre les deux, appartient lui aussi à cet intervalle, et $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$. □

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k^2}$. Très pénible à étudier avec sa somme à nombre de termes variable, mais si on ne veut que la limite, c'est beaucoup plus facile. Chacun des termes de la somme est compris entre le plus petit, en l'occurence $\frac{1}{(2n)^2}$, et le plus grand, à savoir $\frac{1}{(n+1)^2}$, donc $\frac{n}{(2n)^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{(n+1)^2}$ (il y a n termes dans la somme). Chacune des deux suites encadrant u_n ayant pour limite 0, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque 15. Les résultats classiques suivants peuvent être vus comme une extension du théorème des gendarmes au cas de limites infinies :

- si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

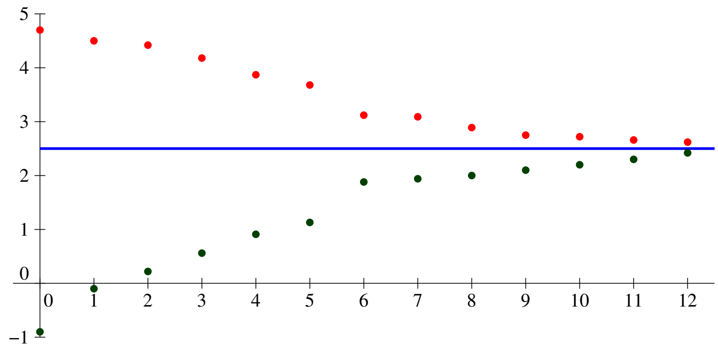
Définition 18. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si elles vérifient les propriétés suivantes :

- (u_n) est croissante (à partir d'un certain rang).
- (v_n) est décroissante (à partir d'un certain rang).
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

Théorème 7. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors :

- (u_n) et (v_n) sont convergentes.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration. Commençons par constater que la suite $(u_n - v_n)$ est croissante (à partir d'un certain rang qu'on supposera nul pour simplifier la rédaction) et a pour limite 0. Cela implique que cette suite est à termes négatifs : en effet, si on avait, pour un rang n_0, $u_{n_0} - v_{n_0} = \alpha > 0$, $(u_n - v_n)$ serait supérieure à $\alpha > 0$ à partir d'un certain rang, donc ne pourrait pas converger vers 0. Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
Mais alors, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Autrement dit, (u_n) est croissante et majorée donc convergente. De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc converge également. Si on note l et l' leurs limites respectives, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = l - l' = 0$, donc $l = l'$, ce qui achève la démonstration. □



Exemple : Considérons les suites définies par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante
- $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2} < 0$, donc (v_n) est décroissante
- reste à vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$, ce qui n'a rien de difficile puisque $u_n - v_n = -\frac{1}{n}$

Les deux suites sont donc adjacentes, ce qui est une façon de prouver la convergence de la suite (u_n). Par contre, le théorème des suites adjacentes ne permet absolument pas de déterminer la valeur de la limite commune des deux suites.

Remarque 16. Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, en notant l leur limite (et en les supposant monotones à partir du rang 0), on aura : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$. Cette constatation permet d'encadrer aisément la limite des deux suites, et même, en connaissant la valeur de $u_n - v_n$, de déterminer pour quelle valeur de n le terme u_n (ou v_n) représente une valeur approchée de précision imposée de la limite. Ainsi, dans l'exemple précédent, si on veut une valeur approchée de la limite (qui est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$ à $\dfrac{1}{10}$ près, il suffira de prendre $n = 10$ (puisque $v_n - u_n = \dfrac{1}{n}$) et on aura un intervalle de largeur $\dfrac{1}{10}$ dans lequel se trouve la limite. Bien sûr, faire le calcul à la main est pénible, en l'occurrence on a $u_{10} = \dfrac{1\ 968\ 329}{1\ 270\ 080}$.

Proposition 20. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux suites définies par $a_n = \dfrac{\mathrm{Ent}(10^n x)}{10^n}$, et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x. Le réel a_n est appelé **approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près**, et le réel b_n **approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près**.

Démonstration. Par définition des parties entières, on a $\mathrm{Ent}(10^n x) \leqslant 10^n x < \mathrm{Ent}(10^n x) + 1$, donc $a_n \leqslant x < b_n$. En multipliant cet encadrement par 10, on obtient $10\,\mathrm{Ent}(10^n x) \leqslant 10^{n+1} x < 10\,\mathrm{Ent}(10^n x) + 1$. Le membre de gauche et celui de droite dans cet encadrement étant des nombres entiers, la caractérisation de la partie entière permet d'affirmer que $10\,\mathrm{Ent}(10^n x) \leqslant \mathrm{Ent}(10^{n+1} x) \leqslant 10^{n+1} x < \mathrm{Ent}(10^{n+1} x) + 1 \leqslant 10\,\mathrm{Ent}(10^n x) + 1$, soit en divisant le tout par 10^{n+1}, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant x < b_{n+1} \leqslant b_n$. Autrement dit, la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante. De plus, $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$ a certainement une limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite. Les encadrements donnés plus haut indiquent que cette limite commune est nécessairement inférieure ou égale à x (puisque la suite (a_n) est majorée par x), mais également supérieure ou égale à x (puisque (b_n) est minorée par x). Elle est donc nécessairement égale à x. $\square$

Remarque 17. Les nombres a_n et b_n correspondent effectivement aux valeurs usuelles utilisées pour les approximations décimales. Par exemple, si $x = \pi$, on obtiendra $a_3 = 3.141$ et $b_3 = 3.142$.