

# Feuille d'exercices n° 9 : Structures algébriques

MPSI Lycée Camille Jullian

12 décembre 2023

## Exercice 1 (\*\*)

Montrer que la loi  $\star$  définie sur  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  par  $(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + yx'^n)$  est une loi de groupe quel que soit l'entier  $n \geq 1$ .

## Exercice 2 (\*)

On définit une loi  $\star$  sur  $\mathbb{R}$  par  $x \star y = x + y + x^2y^2$ .

1. La loi  $\star$  est-elle associative ? Commutative ?
2. Existe-t-il un élément neutre pour cette loi ?
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations  $1 \star x = 0$  et  $1 \star x = 1$ .

## Exercice 3 (\*)

On munit l'ensemble  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  de la loi  $\star$  définie de la façon suivante :  $x \star y$  est le reste de la division euclidienne de  $x^y$  par 5.

1. Vérifier que  $\star$  est une loi, puis écrire le tableau de la loi  $\star$ .
2. S'agit-il d'une loi de groupe ?
3. Résoudre dans  $E$  les équations  $(3 \star x) \star 2 = 1$ , puis  $4 \star (2 \star x) = 2$ , et enfin  $(3 \star x) \star 3 = 3$ .

## Exercice 4(\*)

On considère l'ensemble  $G$  formé des six applications  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suivantes :  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $f_3(x) = \frac{x-1}{x}$ ,  $f_4(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f_5(x) = \frac{x}{x-1}$  et  $f_6(x) = 1-x$ .

1. Montrer que  $(G, \circ)$  est un groupe. Est-ce un groupe abélien ?
2. Quels sont les sous-groupes de  $G$  contenant exactement deux éléments ?
3. Les sous-ensembles  $H_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$  et  $H_2 = \{f_1, f_2, f_4, f_6\}$  sont-ils des sous-groupes de  $G$  ?

## Exercice 5 (\*)

Soit  $E$  un ensemble quelconque, montrer que  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau commutatif (on rappelle que l'opération  $\Delta$  est la différence symétrique définie par  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ). Quelles sont les unités de cet anneau ?

## Exercice 6 (\*)

Montrer que  $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$  est un corps.

### Exercice 7 (\*\*)

Soit  $G$  un groupe et  $a \in G$ , on note  $\tau_a$  l'application  $\tau_a : \begin{cases} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & axa^{-1} \end{cases}$  (en notant la loi de groupe multiplicativement, ce qu'on fera dans tout l'exercice).

1. Montrer que  $\tau_a$  est un automorphisme de  $G$  (appelé automorphisme intérieur).
2. Si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $G$ , que vaut  $\tau_a \circ \tau_b$ ? Que vaut  $\tau_e$ ?
3. Montrer que l'application  $a \mapsto \tau_a$  est un morphisme de groupes de  $G$  vers  $\text{Aut}(G)$ . Quel est son noyau?

### Exercice 8 (\*\*\*)

Un élément  $x$  d'un groupe  $G$  dont la loi est notée multiplicativement est dit d'ordre fini s'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $x^n = e$ . On appelle alors ordre de l'élément  $x$  le plus petit entier  $n$  vérifiant  $x^n = e$ .

1. Quels sont les éléments d'ordre fini dans  $(\mathbb{R}, +)$ ? Et dans  $(\mathbb{C}^*, \times)$ ?
2. Montrer que, si  $x$  est un élément d'ordre  $n$  de  $G$ ,  $H = \{x^k \mid 0 \leq k < n\}$  est un sous-groupe de  $G$ .
3. Montrer que, si  $x$  est d'ordre fini,  $x^{-1}$  l'est aussi, et que ces deux éléments ont le même ordre.
4. Montrer que, si  $x$  est d'ordre fini,  $xyx^{-1}$  est de même ordre que  $x$ , quel que soit  $y$  appartenant à  $G$ .
5. Montrer que, si  $xy$  est d'ordre fini, alors  $yx$  est d'ordre fini, et a le même ordre que  $xy$ .

### Exercice 9 (\*\*)

Soit  $G$  un groupe.

1. Montrer qu'une intersection de sous-groupes de  $G$  est toujours un sous-groupe de  $G$ .
2. Soit  $x \in G$ , on appelle centralisateur de  $x$  dans  $G$  l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent avec  $x$ . Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de  $G$ .
3. On appelle centre de  $G$  l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent avec tous les éléments de  $G$ , montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de  $G$ .

### Exercice 10 (\*\*\*)

Soit  $(G, \star)$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ .

1. On définit sur  $G$  une relation  $\mathcal{R}$  par  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists z \in H, y = x \star z$ . Montrer que la relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence. Quelle est la classe d'équivalence de l'élément  $x$ ?
2. Montrer que les classes d'équivalence de la relation  $\mathcal{R}$  ont toutes le même nombre d'éléments.
3. En déduire que le nombre d'éléments de  $H$  est forcément un diviseur de celui de  $G$ .
4. Quels sont les sous-groupes d'un groupe fini contenant un nombre premier d'éléments?

### Exercice 11 (\*\*)

On note  $A = \left\{ \frac{p}{2^n} \mid (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ .

1. Montrer que  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$ .
2. Déterminer les unités de  $A$ .
3. Mêmes questions avec l'ensemble des nombres décimaux.

**Exercice 12 (\*\*\*)**

Soit  $A$  un anneau, un élément  $x \in A$  est dit nilpotent s'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $x^n = 0$ .

1. Montrer que, si  $A$  est intègre,  $0$  est le seul élément nilpotent.
2. Montrer que, si  $x$  et  $y$  sont nilpotents et commutent,  $x + y$  et  $xy$  sont encore nilpotents.
3. Montrer que, si  $x$  est nilpotent,  $1 - x$  est inversible, et déterminer son inverse.

**Exercice 13 (\*\*)**

Soit  $(A, +, \times)$  un anneau dans lequel  $\forall x \in A, x^2 = x$ .

1. Montrer que,  $\forall x \in A, 2x = 0$ .
2. Montrer que  $A$  est nécessairement un anneau commutatif.
3. Montrer que  $\forall (x, y) \in A^2, xy(x + y) = 0$ .
4. En déduire que, si  $A$  contient au moins trois éléments, il ne peut pas être un anneau intègre.

**Exercice 14 (\*\*\*)**

On note pour tout l'exercice  $\alpha$  l'une des deux solutions de l'équation  $z^2 + z + 2$ . Le choix de la solution et la valeur exacte de  $\alpha$  n'ont aucune importance pour la suite de l'exercice. On note  $\mathbb{Z}[\alpha] = \{p + \alpha q \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ .

1. Montrer que  $\mathbb{Z}[\alpha]$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .
2. Quelles sont les valeurs de  $\alpha + \bar{\alpha}$  et de  $\alpha\bar{\alpha}$  ?
3. Montrer que  $\mathbb{Z}[\alpha]$  est stable par conjugaison complexe.
4. Montrer que,  $\forall z \in \mathbb{Z}[\alpha], z\bar{z} \in \mathbb{N}$ .
5. Soit  $z = p + \alpha q \in \mathbb{Z}[\alpha]$ , montrer que  $z$  est inversible dans  $\mathbb{Z}[\alpha]$  si et seulement si  $p^2 + 2q^2 - pq = 1$ .
6. Montrer que  $z$  ne peut pas être inversible si  $pq < 0$ .
7. Montrer que  $z$  ne peut pas non plus être inversible si  $pq > 0$ .
8. En déduire l'ensembles des unités de  $\mathbb{Z}[\alpha]$ .