Feuille d'exercices n° 21 : Probabilités

MPSI Lycée Camille Jullian

30 avril 2024

Exercice 1 (**)

On lance un dé quatre fois de suite. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient quatre fois le même chiffre.
2. On obtient quatre chiffres différents.
3. On obtient quatre chiffres qui se suivent (en ordre croissant ou décroissant).

Exercice 2 (*)

Dans une urne se trouvent 4 boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement (sans remise) une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné, quelle est la probabilité de gain pour chaque personne ?

Exercice 3 (**)

Dans un petit pays, les numéros de téléphone sont constitués de seulement 6 chiffres. On compose un tel numéro au hasard. Calculer les probabilités suivantes :

1. Le numéro composé commence par 01.
2. Le numéro composé est constitué de 6 chiffres distincts.
3. Le numéro composé contient deux fois le chiffre 5.
4. Le numéro composé ne contient que des chiffres pairs.
5. Le numéro composé a ses six chiffres en ordre strictement croissant.

Exercice 4 (*)

On tire au hasard (sans remise) deux dominos dans un jeu de dominos. Quelle est la probabilité qu'on puisse les poser côte à côte ?

Exercice 5 (**)

On effectue une série de lancers d'une pièce équilibrée.

1. Pour un entier $n \geq 1$, quelle est la probabilité d'obtenir le n-ème Pile avant le n-ème Face ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir le n-ème Pile avant la $n+1$-ème Face ?

Exercice 6 (*)

On dipose de quatre dés un peu étranges, équilibrés à six faces mais avec de drôles de valeurs sur les faces :

- le dé A porte deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 5
- le dé B a toutes ses faces numérotées 4
- le dé C a quatre faces numérotées 3 et deux faces numérotées 42

- le dé D a trois faces numérotées 2 et trois faces numérotées 6

1. On lance simultanément les quatre dés. Calculer $\mathbb{P}(A > B)$ (à comprendre dans le sens « le dé A donne un résultat supérieur au dé B »), $\mathbb{P}(B > C)$, $\mathbb{P}(C > D)$ et $\mathbb{P}(D > A)$. Commenter les résultats obtenus.
2. Deux joueurs jouent au jeu suivant : le joueur 1 choisit un dé parmi les quatre et le lance, puis le joueur 2 choisit un dé parmi les trois restants et le lance. Celui qui obtient le plus grand numéro gagne. Vaut-il mieux jouer en premier ou en deuxième ?

Exercice 7 (***)

Dans une urne sont placées 15 boules vertes et 10 boules blanches. On tire successivement (sans remise) 5 boules dans l'urne. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient 5 boules vertes.
2. On obtient une première boule verte, les deux suivantes blanches, les deux dernières vertes.
3. On obtient au plus une boule blanche.
4. On obtient trois boules vertes et deux blanches.

Reprendre l'exercice avec des tirages avec remise.

Exercice 8 (***)

Deux personnes A et B jouent au jeu suivant : A lance un pièce, s'il obtient Pile, il a gagné. Sinon, B lance une pièce, s'il obtient Face il a gagné. Sinon, c'est à nouveau à A de jouer etc. On note A_k (respectivement B_k) l'événement : « Le joueur A (respectivement B) gagne à son k-ème lancer ». Calculer la probabilité de A_k et de B_k. On suppose désormais que le jeu s'arrête après 10 lancers (cinq pour chaque joueur). Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Le joueur A gagne en lançant moins de trois fois la pièce.
2. Le joueur B gagne.
3. Personne ne gagne.
4. On suppose que quelqu'un a gagné. Quelle est la probabilité que ce soit A ?

Exercice 9 (***)

On range aléatoirement cinq boules distinguables dans quatre boites également distinguables.

1. Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boite ?
3. Quelle est la probabilité que deux boites exactement soient vides ?
4. Même question avec une boite vide.
5. En déduire la probabilité qu'aucune boite ne soit vide.
6. Retrouver ce résultat directement à l'aide de la formule de Poincaré.

Exercice 10 (***)

Un tournoi de tennis accueille 64 joueurs, dont 8 sont têtes de séries. Un bug au moment d'effectuer le tirage au sort fait remplir le tableau de façon totalement aléatoire, y compris les têtes de séries.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux têtes de série se rencontrent dès le premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que les têtes de séries ne puissent pas se rencontrer avant les quarts de finale ?

Exercice 11 (*)

Un classique : une maladie touche un individu sur 100. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour 0.1% des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ? Reprendre le même exercice en supposant maintenant que la maladie ne touche qu'une personne sur 1 000, et que le test sera positif pour 0.5% des individus sains. Que penser du résultat obtenu ?

Exercice 12 (*)

Une guerre sévit depuis des années entre deux pays voisins. Les habitants du pays A sont à 60% favorables à la paix et à 16% favorables à la guerre (le reste étant sans opinion) ; par contre dans le pays B, 68% des habitants sont pour la guerre et 12% sont pour la paix. On rencontre un individu sans savoir quel pays il habite (une chance sur deux pour chaque).

1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. Il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il habite le pays A ?
3. Même question s'il est favorable à la paix.

Exercice 13 (**)

Une urne contient trois boules dont la couleur a été choisie de la façon suivante : on a tiré trois fois de suite une pièce équilibrée à Pile ou Face, et on a mis dans l'urne une boule blanche pour chaque Pile obtenu, et une boule noire pour chaque Face obtenu. On tire ensuite n boules successivement sans remise dans l'urne.

1. On note B_i l'évènement : « on tire une boule blanche au tirage numéro i ». Calculer $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(B_2)$ et $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. Calculer la probabilité que les n boules tirées soient toutes blanches.
3. On a obtenu trois boules blanches lors des trois premiers tirages. Quelle est la probabilité que l'urne ne contienne que des boules blanches ?
4. On a obtenu trois boules blanches lors des trois premiers tirages. Quelle est la probabilité que le quatrième tirage donne à nouveau une boule blanche ?

Exercice 14 (***)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ rouges. On choisit au hasard une urne puis on tire deux boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ? Même question si on tire successivement les deux boules avec remise. Quelles sont les limites de ces probabilités quand n tend vers l'infini ?

Exercice 15 (**)

On étudie la fréquence d'apparition d'une paire de gènes dans une population donnée. Le gène en question peut prendre deux formes A et B, chaque individu a donc une paire de gène de la forme AA, AB ou BB. Chaque parent transmet à chacun de ses enfants une des deux formes du gène qu'il possède avec même probabilité $\frac{1}{2}$ (évidemment, un parent AA transmettra donc forcément A et un parent BB transmettra forcément B). On suppose qu'à la première génération étudiée, la fréquence d'apparition de paires AA est égale à x, celle des paires BB est de y et celle de AB est de $2z$, avec $x+y+2z=1$ (et bien sûr x, y et z tous les trois positifs).

1. Calculer les fréquences d'apparition de chaque gène à la deuxième génération.
2. Calculer les fréquences d'apparition de chaque gène à la troisième génération. Que constate-t-on ?

Exercice 16 (**)

Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
3. On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé ne soit pas truqué ?

Exercice 17 (**)

On dispose de deux urnes, la première contenant 6 boules rouges et trois noires, et la deuxième 6 noires et trois rouges. On choisit une urne au hasard, puis on y tire deux boules, on obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ? Même question si on effectue les deux tirages successivement avec remise.

Exercice 18 (***)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numéro i contenant i boules blanches et $n+1-i$ boules noires. On effectue l'expérience suivante : on choisit une urne au hasard parmi les n urnes disponibles, mais avec une probabilité proportionnelle à la valeur de i, puis on tire dans cette urne p boules simultanément (avec de préférence $p \leq n$). On note alors A l'évènement « toutes les boules tirées sont blanches ».

1. En notant $S_{n,p} = \sum_{i=p}^{n} i\binom{i}{p}$, montrer que $S_{n,p} = (p+1)\sum_{i=p}^{n}\binom{i+1}{p+1} - \sum_{i=p}^{n}\binom{i}{p}$.
2. En déduire une expression explicite de $S_{n,p}$ (sans utilisation du symbole $\sum$).
3. Calculer la probabilité que le tirage décrit dans l'énoncé s'effectue dans l'urne numéro i.
4. En déduire une expression de $\mathbb{P}(A)$ sous forme de somme, puis calculer explicitement $\mathbb{P}(A)$.
5. Que se passe-t-il quand n tend vers $+\infty$?
6. Lors de la même expérience, calculer la probabilité de l'évènement B : « au moins l'une des boules tirées est blanche ».

Exercice 19 (**)

Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n, il y a une probabilité $\frac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. Par contre, si elle est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec probabilité $\frac{9}{10}$. On note p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire p_n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 20 (***)

Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces A et B. Elle est dans la pièce A à $t = 0$, et évolue ainsi : si elle est en A à l'instant n, elle reste en A avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe en B avec probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n+1$, si elle est en B, elle retourne en A avec probabilité $\frac{1}{4}$, reste en B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle est dehors, elle y reste. On note A_n : « La guêpe est en A à l'instant n ». Je vous laisse deviner ce que représentent B_n et C_n. Les probabilités respectives de ces événements sont notées a_n, b_n et c_n.

1. Calculer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

3. Montrer que $u_n = \dfrac{6}{10}a_n - \dfrac{3}{10}b_n$ est une suite stationnaire.
4. Montrer que $v_n = \dfrac{4}{10}a_n + \dfrac{3}{10}b_n$ est une suite géométrique.
5. En déduire les valeurs de a_n et de b_n.
6. Que vaut c_n ?

Exercice 21 (***)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons, et on sait qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (qui peut être égal à 0 ; autrement dit, on peut piocher une poignée vide). Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans notre poignée ? Les évènements A : « On a pioché le jeton 1 » et B : « On a pioché le jeton 2 » sont-ils indépendants ? Mêmes questions dans le cas où ce n'est plus le nombre de jeton qui est réparti uniformément, mais où on a équiprobabilité sur toutes les poignées possibles (toujours en comptant la poignée vide) ?

Exercice 22 (***)

Deux joueurs s'affrontent à un jeu dans lequel il y a nécessairement un gagnant à l'issue de chaque partie. Initialement, le joueur 1 et le joueur 2 possèdent 50 euros chacun. On suppose qu'à chaque partie, le joueur 1 a une certaine probabilité $p \in]0,1[$ de gagner, et le joueur 2 une probabilité $1-p$ de gagner. À l'issue de chaque partie, le perdant donne un euro au gagnant, et on continue à jouer jusqu'à ce qu'un des deux joueurs n'ait plus d'argent. On note p_n (respectivement q_n) la probabilité que le joueur 1 finisse ruiné s'il dispose de n euros à un moment donné du jeu.

1. Exprimer p_n en fonction de p_{n+1} et p_{n-1}.
2. Calculer explicitement p_n en fonction de n.
3. Calculer de même q_n puis $p_n + q_n$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 23 (***)

Un élève de prépa ayant décidé de vraiment s'aérer l'esprit pendant les vacances s'est programmé une semaine de farniente aux îles Berthe, au coeur de l'océan des Mathématiques. Cette destination peu prisée des touristes n'est desservie que par une unique compagnie aérienne, dont la fiabilité laisse malheureusement quelque peu à désirer. Sur les avions de cette compagnie, chaque moteur a une probabilité p (inconnue) de tomber en panne pendant le vol (les différents moteurs ont un comportement indépendant les uns des autres). Tout avion est amené à s'écraser si (au moins) la moitié de ses moteurs tombe en panne pendant le vol.

1. On s'intéresse pour l'instant au cas d'un avion à deux moteurs. Montrer que la probabilité qu'au moins l'un de ses deux moteurs tombe en panne vaut $p(2-p)$.
2. En déduire la probabilité que l'avion à deux moteurs arrive à bon port (on notera A cet événement).
3. On considère désormais un avion à quatre moteurs. En notant M_1 l'événement « Le moteur n°1 tombe en panne » et similairement pour les trois autres moteurs, décrire l'événement B : « L'avion va s'écraser durant le vol » à l'aide des événements M_i.
4. En déduire $\mathbb{P}(B)$ (attention à ne pas compter plusieurs fois certains cas).
5. Factoriser $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\overline{B})$, et déterminer son signe en fonction de p.
6. Qu'obtient-t-on lorsque $p = 0$ ou $p = 1$? Expliquer ce résultat d'un point de vue probabiliste.
7. Si notre préparationnaire a le choix entre un avion à deux moteurs et un avion à quatre moteurs, lequel lui conseillez-vous (on pourra distinguer des cas selon la valeur de p) ?
8. Notre préparationnaire ayant finalement renoncé à risquer sa vie pour partir à la plage, il se demande ce que donnerait la comparaison de l'avion à quatre moteurs avec un troisième avion à six moteurs. Pouvez-vous l'aider (il faut vraiment que vous ayez vous-même du temps à perdre) ?

Problème (***).

On effectue une succession de lancers d'une même pièce non équilibrée, qui tombe à chaque lancer sur Pile avec probabilité $\frac{2}{3}$ et sur Face avec probabilité $\frac{1}{3}$. Les résultats des différents lancers sont bien entendu indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la probabilité qu'on obtienne deux Piles aux deux premiers lancers ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un Face puis deux Piles lors des trois premiers lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux Piles et deux Faces lors des quatre premiers lancers ?
4. On suppose que les trois premiers lancers ont donné un Pile et deux Faces (pas forcément dans cet ordre). Quelle est la probabilité que le Pile ait été obtenu au deuxième lancer ? Interpréter le résultat obtenu.
5. On suppose maintenant qu'on a obtenu au moins un Pile lors des trois premiers lancers, quelle est la probabilité que le deuxième lancer ait donné un Pile ?
6. On note désormais A_n l'événement : « On obtient **pour la première fois** deux Piles successifs aux lancers numéro $n-1$ et n ». Ainsi, l'évènement A_6 sera réalisé si on a tiré $FPFFPP$ lors des six premiers lancers mais pas si on a tiré $FPPFPP$ puisque dans ce cas le premier double Pile est obtenu au lancer numéro 3. On note a_n la probabilité de l'événement A_n.
   (a) Préciser les valeurs de a_2, a_3 et a_4.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$ (on pourra distinguer deux cas, selon qu'on a obtenu un Face ou un Pile au tout premier lancer).
   (c) Calculer a_n en fonction de n.
   (d) Si vraiment vous êtes motivés, calculez $\sum_{k=2}^{n} a_k$, puis la limite de cette somme quand n tend vers $+\infty$, et interprétez le résultat obtenu.
7. Avec les notations de la question précédente, on admet que la limite (si elle existe) de la somme $\sum_{k=2}^{n} ka_k$ représente le nombre moyen de lancers nécessaires avant d'obtenir pour la première fois un double Pile. Cette formule vous paraîtra probablement plus logique après le futur chapitre sur les variables aléatoires. En attendant, cherchons à calculer cette valeur un peu brutalement :
   (a) Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$ (deux méthodes possibles : une récurrence brutale, ou un calcul de deux façons différentes de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$).
   (b) En déduire que la somme $\sum_{k=1}^{n} kx^k$ converge quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si $x \in]-1, 1[$, et préciser sa limite dans ce cas.
   (c) À l'aide de cette formule, donner $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} ka_k$.
8. Refaire les deux questions précédentes (seulement la sous-question c pour la question 7) en supposant désormais que la pièce déséquilibrée tombe sur Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et sur Face avec la probabilité complémentaire $1-p$.
9. Que se passerait-il dans les cas très très particuliers $p = 0$ et $p = 1$? Interpréter les limites obtenues pour le nombre moyen de lancers quand p tend vers 0 et vers 1.