

Feuille d'exercices n° 15 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

8 février 2024

Exercice 1 (*)

On obtient plus ou moins péniblement :

- $P + Q = 2X^3 - X^2 + 8X - 1$
- $PQ = -2X^5 + 6X^4 - 5X^3 + 16X^2 - 3X$
- $P^2 = (2X^3 + 5X - 1)^2 = 4X^6 + 25X^2 + 1 + 20X^4 - 4X^3 - 10X = 4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1$
- $P(X^2) = 2(X^2)^3 + 5(X^2) - 1 = 2X^6 + 5X^2 - 1$
- $P \circ Q = 2(-X^2 + 3X)^3 + 5(-X^2 + 3X) - 1 = -2X^6 + 18X^5 - 54X^4 + 54X^3 - 5X^2 + 15X - 1$
- $Q \circ P = -(2X^3 + 5X - 1)^2 + 3(2X^3 + 5X - 1) = -(4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1) + 6X^3 + 15X - 3 = -4X^6 - 20X^4 + 10X^3 - 25X^2 + 25X - 4$
- $P'Q = (6X^2 + 5)(-X^2 + 3X) = -6X^4 + 18X^3 - 5X^2 + 15X$
- $Q^{(2)} \circ P' = -2$ (le polynôme $Q^{(2)}$ étant constant, on peut le composer par absolument n'importe quoi, ça donnera toujours -2 !)
- $3PQ - Q^2 \circ P = -6X^5 + 18X^4 - 15X^3 + 48X^2 - 9X - P^4 + 6P^3 - 9P^2$. Bien, calculons donc joyeusement $P^3 = P^2 \times P = (4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1)(2X^3 + 5X - 1) = 8X^9 + 60X^7 - 12X^6 + 150X^5 - 60X^4 + 131X^3 - 75X^2 + 15X - 1$, puis $P^4 = (P^2)^2 = (4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1)^2 = 16X^{12} + 160X^{10} - 32X^9 + 600X^8 - 240X^7 + 1024X^6 - 600X^5 + 745X^4 - 508X^3 + 150X^2 - 20X + 1$. Il ne reste plus qu'à conclure : $3PQ - Q^2 \circ P = -6X^5 + 18X^4 - 15X^3 + 48X^2 - 9X - 16X^{12} - 160X^{10} + 32X^9 - 600X^8 + 240X^7 - 1024X^6 + 600X^5 - 745X^4 + 508X^3 - 150X^2 + 20X - 1 + 48X^9 + 360X^7 - 72X^6 + 900X^5 - 360X^4 + 786X^3 - 450X^2 + 90X - 6 - 36X^6 - 180X^4 + 36X^3 - 225X^2 + 90X - 9 = -16X^{12} - 160X^{10} + 80X^9 - 600X^8 + 600X^7 - 108X^6 + 1494X^5 - 1267X^4 + 1315X^3 - 777X^2 + 191X - 16$. Calculatrice, cet exercice ? Meuh non, si peu.

Exercice 2 (*)

1. Il y a une racine très évidente qui est 1. On peut aussi constater (par exemple en jetant un oeil à l'énoncé de la question suivante) que -2 est racine de P : $P(-2) = -8 - 2 \times 4 - 5 \times (-2) + 6 = 0$.
2. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X + 2)Q(X) = (X + 2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (2a + b)X^2 + (2b + c)X + 2c$. Par identification, on obtient $a = 1$, $2a + b = -2$, $2b + c = -5$ et $2c = 6$, donc $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$, soit $P(X) = (X + 2)(X^2 - 4X + 3)$.
3. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $x_1 = \frac{4 - 2}{2} = 1$ (tiens, on a retrouvé notre autre racine évidente) et $x_2 = \frac{4 + 2}{2} = 3$. On a donc $P(X) = (X + 1)(X - 1)(X - 3)$, d'où le tableau de signes suivant :

x	-2	1	3				
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4. La première inéquation se ramène au tableau de signe précédent en posant $X = \ln x$. On en déduit que $X \in]-2, 1[\cup]3, +\infty[$, donc $\mathcal{S} =]e^{-2}, e[\cup]e^3, +\infty[$. Pour la deuxième, on peut tout multiplier par e^x (qui est toujours strictement positif) et tout passer à gauche pour obtenir $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 \leq 0$, ce qui se ramène encore une fois au tableau précédent en posant cette fois-ci $X = e^x$ (ce qui suppose donc $X > 0$). On obtient $X \in [1, 3]$ (on peut oublier l'autre intervalle puisque $X \geq 0$), soit $\mathcal{S} = [0, \ln 3]$.

Exercice 3 (* à ***)

- On est capable de calculer toutes les racines (complexes) du polynôme, qui sont les racines sixièmes du nombre $-1 = e^{i\pi}$: elles ont toutes un module 1 et un argument vérifiant $6\theta \equiv \pi[2\pi]$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{3} \right]$. On peut même toutes les écrire sous forme algébrique : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et les conjugués $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_5 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$ et enfin $z_6 = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Autrement dit, dans $\mathbb{C}[X]$, $X^6 + 1 = (X - i)(X + i) \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$. Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe chaque racine avec son conjugué pour trouver trois facteurs irréductibles de degré 2 : $X^6 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.
- Le premier réflexe doit être de poser $Y = X^3$ pour se ramener à la résolution de l'équation du second degré $Y^2 - 7Y - 8 = 0$. On constate que $Y_1 = -1$ est une racine évidente de l'équation, la seconde étant $Y_2 = 8$. On en déduit que les racines du polynôme initial vérifient soit $X^3 = -1$, soit $X^3 = 8$. Ce qui tombe plutôt bien puisque les deux nombres ont des racines cubiques faciles à calculer, respectivement $X_1 = -1$, $X_2 = -j = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $X_3 = -j^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (ce sont les opposés des racines cubiques de l'unité) et $X_4 = 2$, $X_5 = 2j = -1 + i\sqrt{3}$, $X_6 = 2j^2 = 1 - i\sqrt{3}$ (les doubles des racines cubiques de l'unité cette fois). On conclut pour la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$: $P_2 = (X+1) \left(X - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(X - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (X-2)(X+1-i\sqrt{3})(X+1+i\sqrt{3})$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe comme d'habitude les racines complexes conjuguées pour trouver $P_2 = (X + 1)(X - 2)(X^2 - X + 1)(X^2 + 2X + 4)$.
- Si on avait une différence de carrés à la place de la somme, on factoriserait via une identité remarquable. Eh bien, faisons pareil ici, une somme n'est rien d'autre qu'une différence un peu cachée : $P_4 = (X^2 - 4X + 1 + 3iX - 5i)(X^2 - 4X + 1 - 3iX + 5i)$. Cherchons les racines du premier facteur, qui a pour discriminant $\Delta = (3i - 4)^2 - 4(1 - 5i) = -9 - 24i + 16 - 4 + 20i = 3 - 4i$. On cherche un nombre complexe $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, en ajoutant comme d'habitude l'équation des modules $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{9 + 16} = 5$. Comme par ailleurs $a^2 - b^2 = 3$ (partie réelle de l'équation $\delta^2 = \Delta$), on additionne et soustrait les deux conditions pour trouver $2a^2 = 8$, soit $a = \pm 2$, et $2b^2 = 2$, soit $b = \pm 1$. On doit prendre a et b de signe contraire pour respecter la condition donnée par la partie imaginaire, donc on choisit par exemple $\delta = 2 - i$, ce qui donne les deux racines $X_1 = \frac{4 - 3i + 2 - i}{2} = 3 - 2i$ et $X_2 = \frac{4 - 3i - 2 + i}{2} = 1 - i$. Inutile de recommencer le même type de calcul pour le deuxième facteur, ses racines sont forcément les conjugués des précédentes, puisque le polynôme P_3 est à coefficients réels (si z est racine de P , \bar{z} le sera aussi), soit $X_3 = 3 + 2i$ et $X_4 = 1 + i$. Il ne reste plus qu'à conclure : dans $\mathbb{C}[X]$, $P_3 = (X - 3 - 2i)(X - 3 + 2i)(X - 1 + i)(X - 1 - i)$, et dans $\mathbb{R}[X]$, $P_4 = (X^2 - 6X + 13)(X^2 - 2X + 2)$ après avoir comme toujours regroupé les facteurs correspondant aux racines conjuguées.
- Pour chercher la racine double, il est un peu plus simple de chercher directement les racines du polynôme dérivée $P'_4 = 4X^3 - 15X^2 + 8X + 3$. On constate que 1 est racine évidente, mais

malheureusement 1 n'est pas racine de P_4 puisque $1 - 5 + 4 + 3 + 9 \neq 0$. On enchaîne avec 2, mais $P'(2) = 32 - 60 + 16 + 3 \neq 0$; tentons donc $P'_4(3) = 108 - 135 + 24 + 3 = 0$. Ah, nouvelle chance : $P_4(3) = 81 - 135 + 36 + 9 + 9 = 0$. On a trouvé notre racine double, on peut donc factoriser sous la forme $P_4 = (X - 3)^2 Q$, effectuons une petite division euclidienne pour trouver Q :

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9 & X^2 - 6X + 9 \\
 - (X^4 - 6X^3 + 9X^2) & X^2 + X + 1 \\
 \hline
 X^3 - 5X^2 + 3X + 9 & \\
 - (X^3 - 6X^2 + 9X) & \\
 \hline
 X^2 - 6X + 9 & \\
 - (X^2 - 6X + 9) & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

On en déduit que $P_4 = (X - 3)^2(X^2 + X + 1)$. On ne peut pas faire mieux dans $\mathbb{R}[X]$ puisque le dernier facteur a un discriminant négatif. Dans $\mathbb{C}[X]$,

$$P_4 = (X - 3)^2 \left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

5. Pas trop d'autre choix que de commencer par trouver une racine évidente. Ça tombe bien, $1 - 1 + 1 + 1 - 14 + 20 - 8 = 0$, donc 1 est racine. Vérifions à tout hasard si 1 n'est pas racine multiple : $P'_5 = 6X^5 - 5X^4 + 4X^3 + 3X^2 - 28X + 20$ et $6 - 5 + 4 + 3 - 28 + 20 = 0$. Bon, 1 est donc racine (au moins) double, continuons : $P''_5 = 30X^4 - 20X^3 + 12X^2 + 6X - 28$, et $30 - 20 + 12 + 6 - 28 = 0$. Parfait, 1 est donc racine triple. On ne sait jamais, peut-être même mieux : $P'''_5 = 120x^3 - 60X^2 + 24X + 6$. Ah non, là ce marche pas du tout, contentons-nous de factoriser P_5 sous la forme $(X^3 - 3X^2 + 3X - 1)(aX^3 + bX^2 + cX + d) = aX^6 + (b - 3a)X^5 + (c - 3b + 3a)X^4 + (d - 3c + 3b - a)X^3 + (-3d + 3c - b)X^2 + (3d - c)X - d$. Une petite identification des coefficients donne $a = 1$, $b - 3a = -1$ donc $b = 2$, $c - 3b + 3a = 1$ donc $c = 4$ et $d - 3c + 3b - a = 1$ donc $d = 8$ (on vérifie par acquit de conscience que les trois dernières conditions sont bien des égalités, ce qui est évidemment le cas). Reste maintenant à factoriser le polynôme de degré 3 suivant : $Q = X^3 + 2X^2 + 4X + 8$ (amusante suite géométrique dans les coefficients, soit dit en passant). Il vaudrait mieux trouver une nouvelle racine évidente, ce qui est le cas : $(-2)^3 + 2(-2)^2 + 4(-2) + 8 = -8 + 8 - 8 + 8 = 0$, donc on peut à nouveau factoriser par $X + 2$. Allez, pour changer un peu des sempiternelles divisions euclidiennes et autres identifications, utilisons les relations coefficients-racines pour trouver les deux dernières racines qu'on notera y et z . En appliquant les relations au polynôme Q , on obtient $-2 + y + z = -2$, donc $y + z = 0$, et $-2yz = -8$, soit $yz = 4$ (on a laissé de côté la relation intermédiaire qui n'est pas indispensable ici). Autrement dit, $z = -y$ et $-y^2 = 4$, donc $y = \pm 2i$, et z sera son opposé. On peut maintenant conclure : $P_5 = (X - 1)^3(X + 2)(X - 2i)(X + 2i)$ dans $\mathbb{C}[X]$, et $P_5 = (X - 1)^3(X + 2)(X^2 + 4)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

6. La méthode normale est ici de poser $Y = X^4$ pour obtenir $Y^2 + Y + 1$. On commence à savoir que ce trinôme a pour racines $Y_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Y_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Il ne reste plus qu'à trouver les racines quatrièmes de ces deux nombres pour avoir les huit racines de P_6 . Ouf, c'est assez facile, pour Y_1 on trouve $e^{i\frac{2\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $e^{i(\frac{\pi}{6} + \pi)} = -e^{i\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et $-e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les racines quatrièmes de Y_2 sont simplement les conjugués des précédentes, à savoir $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ et $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Conclusion : $P_6 = \left(X - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(X - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$

$\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines conjuguées pour obtenir $P_6 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

Mais les plus astucieux auront naturellement évité tous ces affreux calculs en recourant à l'ignoble astuce suivante : $P_6 = X^8 + X^4 + 1 = (X^8 + 2X^4 + 1) - X^4 = (X^4 + 1)^2 - (X^2)^2$. On reconnaît maintenant une différence de deux carrés, qu'on sait factoriser : $P_6 = (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$. Chacun des deux facteurs peut à nouveau se factoriser en utilisant la même technique : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ et $X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}X)^2 = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$. Finalement, on obtient la factorisation suivante pour P_6 : $P_6 = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$ (et on constate que chacun des quatre facteurs a un discriminant négatif, on ne peut donc pas aller plus loin dans $\mathbb{R}[X]$).

7. Méthode normale : on pose $Y = X^3$, on cherche à factoriser $Y^3 + Y^2 + Y + 1$. Il y a -1 qui est racine évidente, on peut factoriser sous la forme $(Y + 1)(Y^2 + 1)$ (la factorisation étant ici triviale, inutile de détailler le calcul). Il ne reste donc plus qu'à trouver les racines cubiques de -1 , i et $-i$. Les racines cubiques de -1 sont -1 , $-e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les racines cubiques de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont $e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ et $e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. Les racines cubiques de $-i$ sont les opposées de celles de i , à savoir $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et enfin i . On trouve donc la factorisation $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X + 1)(X + i)(X - i) \left(X - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(X - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on peut factoriser sous la forme $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.
8. Ici, difficile de s'en sortir sans astuce, il n'y a même pas l'ombre d'une racine évidente. Il faut en fait constater que $(X + 1)P_8(X) = X^7 - X^6 + \dots + X + X^6 - X^5 + \dots + 1 = X^7 + 1$. Voilà un polynôme qu'on sait factoriser, ses racines sont les racines septièmes de -1 , qui sont les opposés des racines septièmes de l'unité (qu'on ne cherchera pas à exprimer autrement que sous forme exponentielle, il ne s'agit pas de valeurs remarquables), donc $(X + 1)P_8 = (X + 1)(X + e^{i\frac{2\pi}{7}})(X + e^{i\frac{4\pi}{7}})(X + e^{i\frac{6\pi}{7}})(X + e^{i\frac{8\pi}{7}})(X + e^{i\frac{10\pi}{7}})(X + e^{i\frac{12\pi}{7}})$, dont on déduit évidemment que $P_8 = (X + e^{i\frac{2\pi}{7}})(X + e^{i\frac{4\pi}{7}})(X + e^{i\frac{6\pi}{7}})(X + e^{i\frac{8\pi}{7}})(X + e^{i\frac{10\pi}{7}})(X + e^{i\frac{12\pi}{7}})$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on aura $P_8 = \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1\right) \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 1\right) \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + 1\right)$.

Exercice 4 (**)

1. Posons donc $z = a + ib$ et tentons de trouver $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. On doit donc avoir $a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $2ab = \frac{1}{2}$, et en passant par le module $a^2 + b^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$. En additionnant les deux équations extrêmes, on trouve $2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $a = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$. De même en soustrayant, et en utilisant le fait que a et b sont de même signe, on obtient $b = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$. Les deux racines carrées de $\frac{i + \sqrt{3}}{2}$ sont donc $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$.

Le calcul des racines carrées de $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ est extrêmement similaire puisqu'on échange en fait les équation concernant a et b (le module est inchangé) pour obtenir les deux valeurs $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$.

2.

$$\begin{array}{rcc}
 X^6 & - & i \\
 - (X^6 + iX^4) & & \left| \begin{array}{l} X^2 + i \\ X^4 - iX^2 - 1 \end{array} \right. \\
 & - & iX^4 \\
 & - & (-iX^4 + X^2) \\
 & & - X^2 \\
 & - & (-X^2) \\
 & & - i \\
 & & - i \\
 & & 0
 \end{array}$$

On peut donc écrire $X^6 - i = (X^2 + i)(X^4 - iX^2 - 1)$. Le premier facteur a pour racines $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ et $\frac{i-1}{\sqrt{2}}$ qui sont les racines carrées de $-i$ (on les trouve facilement en passant par la forme exponentielle si besoin), en posant $Y = X^2$ dans le deuxième facteur, on trouve pour discriminant $\Delta = -1 + 4 = 3$, donc les solutions sont $Y_1 = \frac{i + \sqrt{3}}{2}$ et $Y_2 = \frac{i - \sqrt{3}}{2}$. Quelle surprise, ce sont les deux nombres dont on a calculé les racines carrées à la première question. Finalement, on obtient la sublissime expression :

$$\begin{aligned}
 X^6 - i &= \left(X - \frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \left(X + \frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \left(X - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \right) \\
 &\left(X - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \right) \left(X - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right) \left(X - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

3. C'est évident nettement plus simple : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc les solutions sont de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$, donc sont égales à $e^{i\frac{\pi}{12}}$, $e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{12}}$, $e^{i\frac{9\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $e^{i\frac{13\pi}{12}}$, $e^{i\frac{17\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

Les racines carrées de $-i$ sont celles correspondant aux arguments multiples de $\frac{\pi}{4}$. Parmi les quatre qui restent, deux ont une partie réelle et une partie imaginaire positives, ce sont $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{5\pi}{12}}$, celle qui correspond à $\frac{\pi}{12}$ est celle ayant la plus grande partie réelle. On en déduit

$$\text{que } e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}. \text{ En particulier, } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$

Exercice 5 (**)

- Pour éviter des identifications un peu lourdes, utilisons le fait que 1 est racine double du polynôme P , et 0 racine simple. Comme P est de degré 3, on peut l'écrire sous la forme $P = aX(X-1)^2$. On a donc $P' = a(X-1)^2 + 2aX(X-1)$, d'où $P'(0) = a$. Il faut donc prendre $a = 2$ pour satisfaire la condition $P'(0) = 2$, et la seule solution est alors $P = 2X(X-1)^2$.

Si on tient absolument à procéder par identification, on écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, d'où $P' = 3aX^2 + 2bX + c$. les quatre conditions de l'énoncé se traduisent alors par $d = 0$, $a + b + c + d = 0$, $3a + 2b + c = 0$ et $c = 2$. On a donc $a + b = -2$ et $3a + 2b = -2$. Par substitution, $b = -2 - a$, donc $3a - 4 - 2a = -2$, soit $a = 2$ puis $b = -4$. On trouve donc $P = 2X^3 - 4X^2 + 2X = 2X(X-1)^2$.

- Le plus simple ici est de travailler sur les racines possibles du polynôme P . Si a est racine de P , alors $(a+3)P(a) = aP(a+1) = 0$, et $P(a+1)$ est également racine de P , sauf si $a = 0$. En itérant le procédé, $a+2$ sera aussi racine sauf si $a+1 = 0$, puis $a+3$ sera racine etc. Finalement, tous les nombres de la forme $a + k$ seront racines du polynôme pour $k \in \mathbb{N}$, sauf s'il existe un entier naturel k tel que $a + k = 0$, c'est-à-dire $a = -k$. Comme un polynôme autre que le

polynôme nul (qui est une solution triviale du problème que nous allons désormais écarter) ne peut pas avoir une infinité de racines, les seules racines possibles de P sont les entiers négatifs. Or, on peut aussi faire le raisonnement dans l'autre sens : si a est racine alors en posant $X = a - 1$ dans l'égalité de départ, $(a - 1)P(a) = (a + 2)P(a - 1)$, et $a - 1$ est racine de P sauf si $a + 2 = 0$. Comme précédemment, on obtiendra une infinité de racines sauf si $a + 2 - k = 0$ pour un entier naturel k , c'est-à-dire $a = k - 2$. En comparant avec la première condition obtenue, les seules racines possibles de P sont $0, -1$ et -2 . Autrement dit, $P = \lambda X^\alpha (X + 1)^\beta (X + 2)^\gamma$ (rien n'interdit a priori d'avoir des racines multiples). Réinjectons cette formule dans l'équation de départ : $\lambda(X + 3)X^\alpha (X + 1)^\beta (X + 2)^\gamma = \lambda X(X + 1)^\alpha (X + 2)^\beta (X + 3)^\gamma$. Par unicité de la factorisation d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles, on doit avoir $\alpha = 1, \beta = \alpha, \gamma = \beta$ et $1 = \gamma$, donc les polynômes solutions sont de la forme $P(X) = \lambda X(X + 1)(X + 2)$.

- Il est encore une fois ici plus simple de travailler avec le polynôme dérivé : on sait que -1 est racine double de $P + 1$ et 1 est racine double de $P - 1$, donc -1 et 1 sont racines de P' (les constantes disparaissent en dérivant). Comme P est de degré 3 , P' est de degré 2 et s'écrit donc nécessairement $P' = \alpha(X + 1)(X - 1) = \alpha(X^2 - 1)$. Par conséquent, $P = \frac{\alpha}{3}X^3 - \alpha X + \beta$. Reste à trouver α et β tels que -1 soit racine de $P + 1$, c'est-à-dire $P(-1) = -1$, et 1 soit racine de $P - 1$, soit $P(1) = 1$. On obtient les conditions $-\frac{\alpha}{3} + \alpha + \beta = -1$, et $\frac{\alpha}{3} - \alpha + \beta = 1$. En additionnant les deux équations, on trouve $\beta = 0$, puis $\frac{2}{3}\alpha = -1$, soit $\alpha = -\frac{3}{2}$. Finalement, l'unique polynôme solution est $P = -\frac{1}{2}X^3 + \frac{3}{2}X$.
- Une bonne tactique ici est d'essayer de commencer par obtenir une information sur le degré du polynôme P en étudiant le coefficient dominant de chacun des deux membres de l'égalité. Si P a pour terme dominant $a_n X^n$, alors le membre de droite a pour terme dominant $a_n X^n$, et X'' a lui-même pour terme dominant $n(n - 1)a_n X^{n-2}$. En multipliant par $X^2 + 4$, on retombe sur du $n(n - 1)a_n X^n$ (le $+4$ ne va pas influencer le terme dominant), donc on obtient la condition nécessaire $n(n - 1) = 6$, soit $n^2 - n - 6 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$ et admet deux solutions $n_1 = \frac{1 + 5}{2} = 3$ et $n_2 = \frac{1 - 5}{2} = -2$. Le degré d'un polynôme étant difficilement négatif, les solutions seront forcément de degré 3 (il faudra tout de même y ajouter la solution triviale constituée par le polynôme nul). Posons donc $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, alors $P'' = 6aX + 2b$, et $(X^2 + 4)P'' = 6aX^3 + 2bX^2 + 24aX + 8b$. Par identification avec $6P$, on obtient les conditions $6a = 6a$ (toujours vérifiée), $2b = 6b$ qui implique $b = 0$, $24a = 6c$ qui donne $c = 4a$ et enfin $8b = 6d$ qui donne $d = 0$ puisque $b = 0$. Conclusion : les seuls polynômes solutions sont ceux de la forme $P = aX^3 + 4aX = aX(X^2 + 4)$.
- Plusieurs pistes possibles ici, mais le plus simple est sûrement de raisonner sur le degré : $d^\circ(P(X^2)) = 2d^\circ(P)$ et $d^\circ((X^2 + 1)P) = 2 + d^\circ(P)$. En oubliant la solution nulle, on doit donc avoir $2d^\circ(P) = d^\circ(P) + 2$, soit $d^\circ(P) = 2$. Posons donc $P = aX^2 + bX + c$, alors $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$ et $(X^2 + 1)P(X) = aX^4 + bX^3 + (c + a)X^2 + bX + c$. Par identification, on trouve les conditions $a = a$ et $c = c$, $b = 0$ (deux fois) et $b = a + c$. On doit donc avoir $c = -a$, et les solutions sont les polynômes de la forme $P = aX^2 - a = a(X^2 - 1)$.
- Le reste de la division d'un polynôme P par $X - 2$ est simplement la valeur de $P(2)$ (c'est une constante, et c'est forcément $P(2)$ puisque le terme $Q(X - 2)$ de la division euclidienne s'annule pour $X = 2$). On cherche donc un polynôme tel que $P(2) = P(3) = P(4)$. En notant $Q = P - P(2)$, Q sera donc un polynôme de degré 3 vérifiant $Q(2) = Q(3) = Q(4) = 0$, autrement dit $Q = \alpha(X - 2)(X - 3)(X - 4)$. Notre polynôme P est donc de la forme $\alpha(X - 2)(X - 3)(X - 4) + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La dernière condition de divisibilité par $X - 1$ impose que $P(1) = 0$, soit $\alpha \times (-1) \times (-2) \times (-3) + \beta = 0$, donc $\beta = 6\alpha$. Finalement, P est un multiple (par une constante) du polynôme $P_0 = (X - 2)(X - 3)(X - 4) + 6 = X^3 - 9X^2 + 26X - 18$.

Exercice 6 (**)

1.

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 + X^2 - 2X + 3 & X^2 + 2X - 1 \\
 - (X^3 + 2X^2 - X) & X - 1 \\
 \hline
 & -X^2 - X + 3 \\
 & - (-X^2 - 2X + 1) \\
 & \hline
 & X + 2
 \end{array}$$

Conclusion : $X^3 + X^2 - 2X + 3 = (X^2 + 2X - 1)(X - 1) + X + 2$.

2.

$$\begin{array}{r|l}
 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6 & X^2 - 3X + 1 \\
 - (2X^4 - 6X^3 + 2X^2) & 2X^2 + 3X + 11 \\
 \hline
 & 3X^3 + 2X^2 - 5X + 6 \\
 & - (3X^3 - 9X^2 + 3X) \\
 & \hline
 & 11X^2 - 8X + 6 \\
 & - (11X^2 - 33X + 11) \\
 & \hline
 & 25X - 5
 \end{array}$$

Conclusion : $2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6 = (X^2 - 3X + 1)(2X^2 + 3X + 11) + 25X - 5$.

3.

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 & - & 2 \cos(2\theta)X^2 & + & 1 & \left| \begin{array}{l} X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1 \\ X^2 + 2 \cos(\theta)X + 1 \end{array} \right. \\
 - (X^4 - 2 \cos(\theta)X^3 + & & X^2) & & & \\
 & 2 \cos(\theta)X^3 - & (4 \cos^2(\theta) - 2 + 1)X^2 & + & 1 & \\
 - (2 \cos(\theta)X^3 - & & 4 \cos^2(\theta)X^2 & + & 2 \cos(\theta)X & \\
 & & X^2 & - & 2(\cos(\theta))X & + & 1 \\
 & - & (X^2 & - & 2 \cos(\theta)X & + & 1 \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

Le résultat est assez sympathique : $X^4 - 2 \cos(2\theta)X + 1 = (X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1)(X^2 + 2 \cos(\theta)X + 1)$.

4.

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 - iX^2 - X & X - 1 + i \\
 - (X^3 + (i - 1)X^2) & X^2 + (1 - 2i)X - 2 - 3i \\
 & (1 - 2i)X^2 - X \\
 & - ((1 - 2i)X^2 + (1 + 3i)X) \\
 & \quad (-2 - 3i)X \\
 & - ((-2 - 3i)X + 5 + i) \\
 & \quad -5 - i
 \end{array}$$

Conclusion : $X^3 - iX^2 - X = (X - 1 + i)(X^2 + (1 - 2i)X - 2 - 3i) - 5 - i$.

5. Il est évidemment hors de question ici de poser la division euclidienne explicitement. Écrivons la division de façon théorique : $P = AQ + R$, avec $d^\circ(R) \leq 1$, soit $R(X) = \alpha X + \beta$. Comme tout ce qui nous intéresse est de connaître R , une astuce classique est de prendre comme valeurs particulières de X dans l'égalité précédente les racines du polynôme Q (ce qui fera disparaître le terme en AQ et notamment ce A bien gênant dont on ne sait rien. Ici, on peut donc écrire $P(i) = A(i)Q(i) + \alpha i + \beta$. Comme $Q(i) = 0$ et $P(i) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = e^{in\theta}$, on obtient la première condition $e^{in\theta} = \alpha i + \beta$. De même, avec $X = -i$, on trouve $e^{-in\theta} = -\alpha i + \beta$. En additionnant les deux équations, $2\beta = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos(n\theta)$, donc $\beta = \cos(n\theta)$. On en déduit que $i\alpha = e^{in\theta} - \cos(n\theta) = i \sin(n\theta)$, donc $\alpha = \sin(n\theta)$. Finalement, $(X \cos(\theta) + \sin(\theta))^n = (X^2 + 1)A(X) + \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$.

Exercice 7 (**)

Impossible ici de calculer explicitement la division euclidienne, on va donc passer par les racines : le trinôme $X^2 + X + 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$ et pour racines $X_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = j$ et $X_2 = \bar{j} = j^2$. En notant $P_n = (X^4 + 1)^n - X^n$, P_n est donc divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si $P_n(j) = P_n(j^2) = 0$. Or, on sait que $j^4 = j$ (j est une racine cubique de l'unité) et $j + 1 = -j^2$ (puisque $1 + j + j^2 = 0$ en tant que somme des racines cubiques de l'unité), donc $(j^4 + 1)^n = (-1)^n j^{2n}$, et $P_n(j) = (-1)^n j^{2n} - j^n$. Le terme $-j^n$ prend périodiquement les valeurs $-1, -j$ et $-j^2$ (avec donc une période égale à 3), et le terme $(-1)^n j^{2n}$ prend périodiquement les valeurs $1, -j^2, j, -1, j^2$ et $-j$ (avec cette fois-ci une période 6). On en déduit que les valeurs prises par $P_n(j)$ sont elle-mêmes périodiques de période 6, égales à $0, -j - j^2 = 1, -j^2 + j, -2, j^2 - j$ et 1 . Les seules valeurs pour lesquelles $P_n(j) = 0$ sont donc les multiples de 6. De même, on aura $(j^2)^4 + 1 = j^2 + 1 = -j$, et $P_n(j^2) = (-j)^n - (j^2)^n$ s'annule lorsque n est multiple de 6. Le polynôme P_n est donc divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si n est multiple de 6.

Exercice 8 (*)

On va simplement écrire la division euclidienne des deux polynômes :

$$\begin{array}{r}
 X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2 \\
 - (X^5 - 2X^3 + X^2) \\
 X^4 + (a+2)X^3 + (b-1)X^2 + 5X - 2 \\
 - (X^4 - 2X^2 + X) \\
 + (b+1)X^2 + 4X - 2 \\
 - ((a+2)X^3 - (2a+4)X + a+2) \\
 + (2a+8)X - (a+4)
 \end{array} \left| \begin{array}{l} X^3 - 2X + 1 \\ X^2 + X + (a+2) \end{array} \right.$$

La divisibilité demandée sera présente si le reste de cette division est nul, donc si $b = -1$ et $a = -4$ (coup de chance, les deux derniers termes donnent la même valeur pour a). Autrement dit, si $Q = X^5 + X^4 - 4X^3 - X^2 + 5X - 2$ (dans ce cas, le quotient de la division vaut $X^2 + X - 2$).

Exercice 9 (***)

Posons donc brutalement $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, et $Q = P - X$, alors $P \circ P - X = \sum_{k=0}^n a_k P^k - X = \sum_{k=0}^n a_k (Q + X)^k - X$. Si on développe hyper brutalement chaque $(Q + X)^k$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, on pourra mettre Q en facteur dans tous les termes sauf le premier, qui sera égal à X^k . Autrement dit, il existe un polynôme A tel que $P \circ P - X = AQ + \sum_{k=0}^n a_k X^k - X = AQ + P - X = (A + 1)Q$. On a bien prouvé que $P \circ P - X$ était divisible par $Q = P - X$.

Exercice 10 (***)

Notons donc a, b, c et d les quatre racines du polynôme. Par hypothèse, $ab = 1$, et la dernière relation coefficients-racines donne $abcd = 3$, donc $cd = 3$. Tant qu'on y est, écrivons les autres relations coefficients-racines : $a+b+c+d = 4$, $ab+ac+ad+bc+bd+cd = \lambda$, et $abc+abd+acd+bcd = 12$. La dernière équation s'écrit donc $c + d + 3a + 3b = 12$, donc $2a + 2b = 8$, et $a + b = 4$. Les nombres a et b , dont on connaît la somme et le produit, sont donc solutions de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$,

qui a pour discriminant $\Delta = 16 - 4 = 12$ et pour racines $a = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$ et $b = 2 + \sqrt{3}$. On déduit maintenant de la première relation coefficients-racines que $c + d = 0$, donc $d = -c$, ce qui combiné avec l'équation $cd = 3$, impose $c = i\sqrt{3}$ et $d = -i\sqrt{3}$. Il est temps de calculer $\lambda = ab + (a + b)(c + d) + cd = 1 + 4 \times 0 + 3 = 4$. La factorisation est évidente puisqu'on connaît toutes les racines de P .

Exercice 11 (**)

- Comme P est un polynôme de degré 4, l'hypothèse $P = Q^2$ impose $2 \times d^\circ(Q) = 4$, donc $d^\circ(Q) = 2$. Autrement dit, on peut poser $Q = cX^2 + dX + e$, et calculer $Q^2 = c^2X^4 + 2cdX^3 + (2ce + d^2)X^2 + 2deX + e^2$. Par identification avec les coefficients du polynôme P , on a les conditions $c^2 = 1$ (coefficient de degré 4) donc $c = \pm 1$, $e^2 = 9$ (coefficient constant) donc $e = \pm 3$, $2de = 12$, donc $d = \pm 2$. Cela laisse quatre possibilités : $Q = X^2 + 2X + 3$, qui donne $P = X^4 + 4X^3 + 10X^2 + 12X + 9$; $Q = X^2 - 2X - 3$ qui donne $P = X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 12X + 9$; et deux autres possibilités pour lesquels on choisit $c = -1$, qui donnent des polynômes opposés à ceux déjà cités pour Q , et donc les mêmes polynômes pour P après élévation au carré.
- Commençons par traiter le cas où $Q = X^2 + 2X + 3$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 12 = -8$ et admet donc deux racines complexes $X_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{2}}{2} = -1 - i\sqrt{2}$, et $X_2 = -1 + i\sqrt{2}$. Puisque $P = Q^2$, on peut écrire $P = (X - X_1)^2(X - X_2)^2$, le polynôme P n'a donc que des racines complexes (deux racines doubles, en l'occurrence), et ne peut pas plus se factoriser que sous la forme $P = Q^2 = (X^2 + 2X + 3)^2$. On peut de plus écrire $P - 1 = (Q - 1)(Q + 1) = (X^2 + 2X + 2)(X^2 + 2X + 4)$. Les deux facteurs ayant des discriminants strictement négatifs (respectivement égaux à -4 et -12), on ne peut à nouveau pas factoriser plus dans $\mathbb{R}[X]$.

Passons au cas de $Q = X^2 - 2X - 3$, plus intéressant puisque $\Delta = 4 + 12 = 16$, on a donc deux racines réelles : $X_1 = \frac{2 - 4}{2} = -1$ (qui était même racine évidente) et $X_2 = \frac{2 + 4}{2} = 3$. Comme pour le cas précédent, les racines de Q seront racines doubles de P et $P = (X + 1)^2(X - 3)^2$. On utilise la même méthode que ci-dessus pour factoriser $P - 1$: $(Q - 1)(Q + 1) = (X^2 - 2X - 4)(X^2 - 2X - 2)$. Le premier facteur a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$ et pour racines $X_3 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$ et $X_4 = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5}$, et le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 4 + 8 = 12$ et pour racines $X_5 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$ et $X_6 = 1 - \sqrt{3}$. Finalement, $P - 1 = (X - 1 - \sqrt{5})(X - 1 + \sqrt{5})(X - 1 - \sqrt{3})(X - 1 + \sqrt{3})$.

Exercice 12 (***)

- Jusqu'à là tout va bien : $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$, $P_3 = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 3X$ et $P_4 = X(X^3 - 3X) - (X^2 - 2) = X^4 - 4X^2 + 2$.
- On conjecture aisément que P_n est de degré n et de coefficient dominant 1, c'est-à-dire que $P_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Prouvons-le par récurrence double. C'est vrai pour P_1 et P_2 , supposons-le vrai aux rangs n et $n+1$ alors $P_{n+2} = X(X^{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k X^k) - X^n - \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k = X^{n+2} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k X^k$ (peu importe les coefficients exacts dans ce qui n'est pas dominant). La propriété reste donc vraie au rang $n + 2$, par principe de récurrence, elle est vrai pour tout entier $n \geq 1$.

3. On va encore faire une récurrence double : $P_0 \left(z + \frac{1}{z} \right) = 2$ et $z^0 + \frac{1}{z^0} = 1 + 1 = 2$, donc ça marche pour P_0 . De plus, $P_1 \left(z + \frac{1}{z} \right) = z + \frac{1}{z}$, ce qui prouve la propriété au rang 2. Supposons-la vérifiée aux rangs n et $n+1$, alors $P_{n+2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \left(z + \frac{1}{z} \right) P_{n+1} \left(z + \frac{1}{z} \right) - P_n \left(z + \frac{1}{z} \right) = \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} \right) - z^n - \frac{1}{z^n} = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n} = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n+2$ et la récurrence fonctionne.
4. En posant $z = e^{i\theta}$, on aura $z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$ donc, d'après la question précédente, $P_n(2 \cos(\theta)) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos(n\theta)$.
5. D'après la question précédente, si $\cos(n\theta) = 0$, alors $2 \cos(\theta)$ est une racine de P_n . Or, $\cos(n\theta) = 0$ équivaut à $\theta \equiv \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\pi}{n} \right]$. Tous les réels de la forme $2 \cos \left(\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \right)$ sont donc racines du polynôme P_n . Or, il y a exactement n réels distincts dans cette liste, à savoir $2 \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right)$ pour $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ (ces valeurs sont bien distinctes car étant les cosinus d'angles distincts de l'intervalle $[0; \pi[$ sur lequel le cosinus est bijectif ; par contre, pour les valeurs plus grandes de k , on retrouve les mêmes cosinus : $\cos \left(\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2n} + (2n - k - 1) \frac{\pi}{n} \right)$ si $k \geq n$. Le polynôme P_n étant de degré n , il ne peut avoir plus de n racines, et on vient donc de les exhiber toutes. Conclusion : $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2 \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right)$. Par exemple, pour $n = 3$, $P_3 = \left(X - 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) \left(X - 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \left(X - 2 \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) = X(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}) = X^3 - 3X$, on retrouve bien la bonne formule.

Exercice 13 (**)

Il s'agit bien entendu d'utiliser les relations coefficients-racines pour le polynôme P , qu'on va d'ailleurs commencer par écrire : $a + b + c = 0$, $ab + ac + bc = 1$ et $abc = -1$. On calcule alors $A = \frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{1}{-1} = -1$, puis $B = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{abc} = \frac{(ab + bc + ac)^2 - 2(ab^2c + a^2bc + abc^2)}{-1} = 2abc(b + a + c) - 1 = -1$, et enfin $C = \frac{a^2}{-a} + \frac{b^2}{-b} + \frac{c^2}{-c} = -a - b - c = 0$.

Exercice 14 (**)

Écrivons donc les relations coefficients racines du polynôme P , en notant c la troisième racine : $a + b + c = -1$, $ab + ac + bc = \alpha$ et $abc = -6$. Avec la condition imposée par l'énoncé, on peut réécrire la première relation sous la forme $ab + c = -1$. Les nombres ab et c , dont on connaît la somme et le produit, sont donc solutions de l'équation du second degré $x^2 + x - 6 = 0$, qui admet pour racine évidente $x = 2$ et pour deuxième racine $x = -3$. On a donc deux possibilités :

- soit $ab = a + b = 2$ et $c = -3$. Dans ce cas, a et b sont à leur tour solutions de l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$ et admet donc deux racines complexes $a = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$ et $b = 1 + i$. On calcule alors $\alpha = ab + ac + bc = 2 + 2c = -4$.
- soit $ab = a + b = -3$ et $c = 2$. Dans ce cas, a et b sont solutions de l'équation $x^2 + 3x - 3 = 0$ qui a pour discriminant $\Delta = 9 + 12 = 21$ et admet donc deux racines ignobles $a = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$ et $b = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$. Mais heureusement, on calcule facilement $\alpha = -3 - 3c = -9$.

Exercice 15 (**)

1. Le calcul de S_0 est évidemment trivial : $x^0 + y^0 + z^0 = 3$. Celui de S_1 n'est qu'une application facile des relations coefficients-racines : $x + y + z = 0$ (pas de coefficient de degré 2 dans le polynôme P). Enfin, on applique une astuce standard pour calculer S_2 : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$, et $xy + xz + yz = 3$ (encore les relations coefficients-racines), donc $S_2 = -6$.
2. Par définition, comme x est racine de P , on a $x^3 = 2i - 3x$. De même, $y^3 = 2i - 3y$ et $z^3 = 2i - 3z$, donc on peut écrire $S_{n+3} = x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} = x^3x^n + y^3y^n + z^3z^n = 2ix^n - 3x^{n+1} + 2iy^n - 3y^{n+1} + 2iz^n - 3z^{n+1} = 2iS_n - 3S_{n+1}$.
3. Il ne reste plus qu'à calculer de proche en proche : $S_3 = 2iS_0 - S_1 = 6i$, puis $S_4 = 2iS_1 - 3S_2 = 18$, $S_5 = 2iS_2 - 3S_3 = -30i$, et $S_7 = 2iS_4 - 3S_5 = 126i$.

Exercice 16 (***)

Soit P le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines complexes sont x , y et z . Autrement dit, $P = (X - x)(X - y)(X - z)$. Si on écrit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$, en connaissant par coeur ses relations coefficients-racines ou en développant comme un gros bourrin, on trouve $a = -x - y - z$, donc $a = -1$; $b = xy + yz + xz$. Ah mince, on ne connaît pas cette valeur, rusons un peu en calculant $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1 + 2b$, donc $1 + 2b = 1$ et $b = 0$. Enfin, la dernière relation donne $-xyz = c$. Or, $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz$ (ceux pour qui la formule ne semble pas claire développeront brutalement pour vérifier) soit $1 = -5 + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$, donc, en utilisant que $b = 0$, $1 = -5 + 3c$ et $c = 2$. Finalement, $P = X^3 - X^2 + 2$. Coup de chance (ou plutôt, pour une fois, énoncé bien conçu), ce polynôme de degré 3 a une racine évidente, en l'occurrence -1 . On peut donc factoriser sous la forme $P = (X + 1)(dX^2 + eX + f) = dX^3 + (d + e)X^2 + (e + f)X + f$. Par identification, $d = 1$; $d + e = -1$ donc $e = -2$ et $e + f = 0$ soit $f = 2$. Comme $P = (X + 1)(X^2 - 2X + 2)$, et que la deuxième parenthèse a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$, et donc pour racines $z_1 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$, on peut factoriser P sous la forme $P = (X + 1)(X - 1 - i)(X - 1 + i)$. À permutation près, on connaît les valeurs de x , y et z . Le système initial a six solutions : $\mathcal{S} = \{(-1, 1 - i, 1 + i), (-1, 1 + i, 1 - i), (1 - i, -1, 1 + i), (1 - i, 1 + i, -1), (1 + i, -1, 1 - i), (1 + i, 1 - i, -1)\}$.

On utilise la même méthode que ci-dessus en posant $P = (X - x)(X - y)(X - z) = X^3 + aX^2 + bX + c$. La première relation coefficient-racine stipule que $x + y + z = -a$, donc $a = -1$. Pour la deuxième, on exploite l'astuce habituelle : $1 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$, donc $xy + yz + xz = \frac{1 - 9}{2} = -4$, ce qui impose $b = -4$. Enfin, en mettant tout au même dénominateur, la deuxième équation de notre système peut être écrite sous la forme $\frac{yz + xz + xy}{xyz} = 1$, donc $xyz = -4$, ce qui impose $c = 4$ (ne pas oublier le changement de signe). Autrement dit, $P = X^3 - X^2 - 4X + 4$. Ce polynôme admet 1 pour racine évidente et peut se factoriser à vue : $P = X^2(X - 1) - 4(X - 1) = (X - 1)(X^2 - 4) = (X - 1)(X - 2)(X + 2)$. À permutation des variables près, l'unique solution du système est donc le triplet $(1, 2, -2)$.

Exercice 17 (**)

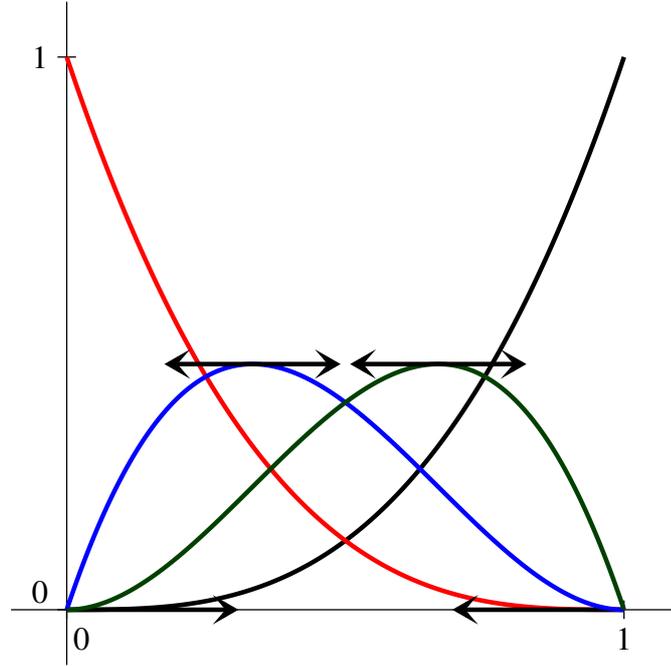
1. Pour une fois, on va utiliser un petit peu d'analyse : calculons bêtement $P(-4) = -64 + 44 + 12 = -8 < 0$ et $P(-3) = -27 + 33 + 12 = 18 > 0$. La fonction polynomiale correspondant à P étant évidemment continue sur $[-4, -3]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que P s'annule (au moins) une fois sur cet intervalle. De même, $P(1) = 1 - 11 + 12 = 2 > 0$ et $P(2) = 8 - 22 + 12 = -2 < 0$ donc P s'annule sur $]1, 2[$. Enfin, $P(3) = 27 - 33 + 12 = 6 > 0$ donc P s'annule également sur $]2, 3[$ (on avait déjà calculé $P(2)$ juste avant). Comme P est

un polynôme de degré 3, il ne peut pas avoir plus de trois racines, qui sont donc toutes réelles et appartenant aux intervalles étudiés.

2. Comme le calcul explicite des arctangentes risque de poser vaguement problème, calculons donc la tangente de ce qu'on nous demande (à l'aide de formules d'addition) : $\tan(\arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c)) = \frac{\tan(\arctan(a) + \arctan(b)) + c}{1 - \tan(\arctan(a) + \arctan(b))c} = \frac{\frac{a+b}{1-ab} + c}{1 - \frac{(a+b)c}{1-ab}} = \frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}$.
- Merveilleux, puisque les relations coefficients-racines appliquées au polynôme P nous donnent justement les valeurs $a+b+c=0$, $ab+ac+bc=-11$ et $abc=-12$. On en déduit que $\tan(\arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c)) = \frac{12}{12} = 1$. Peut-on en déduire immédiatement que la valeur demandée est égale à $\frac{\pi}{4}$? Non, seulement à un multiple entier de π près. Mais les encadrements obtenus pour les trois racines suffisent à affirmer que $-\frac{\pi}{2} < \arctan(a) < -\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < \arctan(b) < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4} < \arctan(c) < \frac{\pi}{2}$, donc la somme demandée appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$, la seule valeur possible est bien $\arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 18 (***)

1. Il suffit de recopier la définition : $B_{3,0} = \binom{3}{0}X^0(1-X)^{3-0} = (1-X)^3 = 1-3X+3X^2-X^3$;
 $B_{3,1} = \binom{3}{1}X^1(1-X)^2 = 3X(1-X)^2 = 3X-6X^2+3X^3$; $B_{3,2} = 3X^2(1-X) = 3X^2-3X^3$
 et $B_{3,3} = X^3$.
2. Le polynôme $B_{3,0}$ est décroissant sur $[0, 1]$ (et même sur \mathbb{R} !), sa dérivée s'annule accessoirement en 1, et il vaut 1 en 0 et 0 en 1. Au contraire, le polynôme $B_{3,3}$ est croissant, de dérivée nulle en 0, s'annule en 0 et vaut 1 en 1. Ensuite, $B'_{3,1} = 3-12X+9X^2 = 3(1-4X+3X^2)$. La parenthèse a pour racine évidente 1, et s'annule également en $\frac{1}{3}$ puisque le produit des racines doit être égal à $\frac{1}{3}$. La fonction $B_{3,1}$ est croissante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$, avec pour maximum $3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Inutile de refaire les calculs pour le dernier polynôme : $B_{3,2}(x) = B_{3,1}(1-x)$, donc sa dérivée s'annule en 0 et en $\frac{2}{3}$, avec un maximum $\frac{4}{9}$ également. Ce qui donne les courbes suivantes ($B_{3,0}$ en rouge, $B_{3,1}$ en bleu, $B_{3,2}$ en vert et $B_{3,3}$ en noir) :



3. Calculons $B_{3,0}+B_{3,1}+B_{3,2}+B_{3,3} = 1-3X+3X^2-X^3+3X-6X^2+3X^3+3X^3-3X^3+X^3 = 1$.

En fait, cette façon de faire le calcul est débile, on a en général $\sum_{k=0}^n B_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1$ en utilisant la formule du binôme de Newton (qui est certainement valable sur l'anneau commutatif $\mathbb{K}[X]$). Comme tous les polynômes $B_{n,k}$ prennent des valeurs positives sur $[0, 1]$ (puisque x et $1-x$ sont positifs sur cet intervalle), on aura toujours $0 \leq B_{n,k} \leq 1$ sur $[0, 1]$.

4. Calculons de façon formelle : $B'_{n,k} = k \binom{n}{k} X^{k-1} (1-X)^{n-k} + (n-k) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k-1}$. Dans la première moitié, on peut utiliser la formule $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ pour obtenir $n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-1-(k-1)} = n B_{n-1,k-1}$. Dans la deuxième moitié, on constate que $(n-k) \binom{n}{k} = \frac{(n-k)n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-1-k)!} = n \binom{n-1}{k}$ et on fait pareil pour trouver $n \binom{n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} = n B_{n-1,k}$. Finalement, $B'_{n,k} = n(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k})$.

5. On a donc $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-1-k} = x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} = x(x+1-x)^{n-1} = x$. Cette expression a certainement pour limite x quand n tend vers $+\infty$!

6. Pour calculer la somme, il est pratique d'écrire le $\frac{k^2}{n^2}$ sous la forme $\frac{k(k-1)}{n^2} + \frac{k}{n^2}$, ce qui donne $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)}{n^2} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n}$ en reprenant le calcul de la question précédente pour la deuxième moitié. On continue le calcul : $f_n(x) = \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{k+2} (1-x)^{n-2-k} + \frac{x}{n} = \frac{n-1}{n} x^2 (x+1-x)^{n-2} + \frac{x}{n} =$

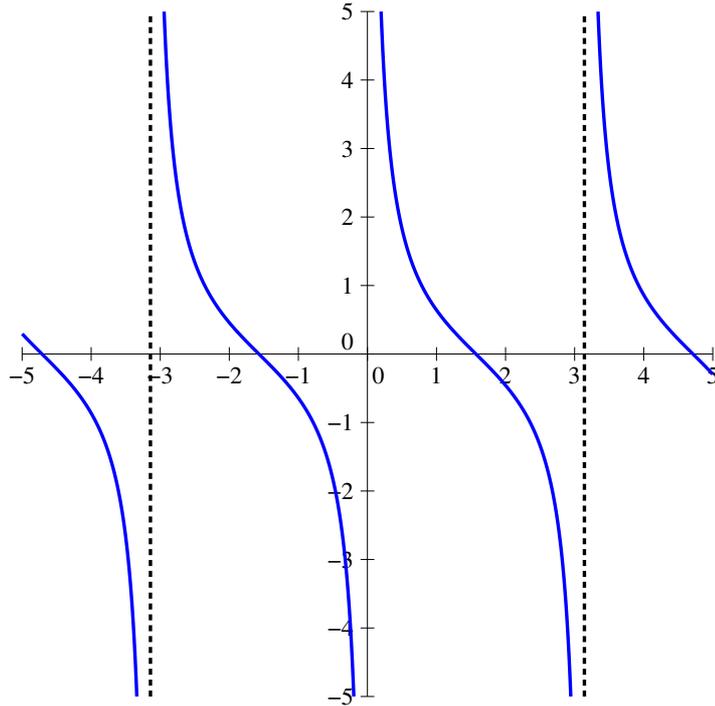
$\frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n}$. cette expression converge bien vers x^2 . On peut en fait démontrer (mais c'est nettement plus compliqué!) que, pour toute fonction f continue sur $[0; 1]$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$.

Exercice 19 (***)

1. Si P n'est pas de degré pair, la fonction polynômiale associée aura une limite égale à $-\infty$ d'un côté ou de l'autre de \mathbb{R} , ce qui n'est pas franchement compatible avec le fait que le polynôme soit toujours positif. De même, si le coefficient dominant était négatif, les limites en $\pm\infty$ seraient égales à $-\infty$.
2. On peut écrire $P = aX^2 + bX + c = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$. Or, a est positif (question précédente) et $4ac - b^2$ aussi (sinon P prendrait une valeur négative pour $x = -\frac{b}{2a}$), donc on peut écrire cette constante comme un carré, et P comme une somme de deux carrés.
3. Calculons bêtement : $(QS + RT)^2 + (QT - RS)^2 = Q^2S^2 + 2QRST + R^2T^2 + Q^2T^2 - 2QRST + R^2S^2 = (Q^2 + R^2)(S^2 + T^2)$.
4. On va procéder par récurrence sur le degré de P , ou plutôt sur la moitié du degré de P puisque celui-ci est forcément pair. On a déjà initialisé pour le degré 2, supposons donc la propriété vérifiée également pour les polynômes de degré $2n$. Considérons alors P de degré $2n + 2$, si P admet au moins une racine réelle, celle-ci est nécessairement (au moins) double (sinon P s'écrirait sous la forme $(X - a)Q$, avec $Q(a) \neq 0$, et cette expression change nécessairement de signe en a , ce qui est incompatible avec les hypothèses initiales). On peut donc factoriser P sous la forme $(X - a)^2Q$, avec Q de degré $2n$ et positif puisque P et $(X - a)^2$ le sont. Par hypothèse de récurrence, $(X - a)^2$ et Q peuvent s'écrire comme somme de deux carrés. Or, un produit de sommes de carrés est aussi une somme de deux carrés (question 3), ce qui prouve la propriété pour le polynôme P . Dans le cas où P n'a pas de racine réelle, on prend une racine complexe et sa racine conjuguée et on factorise sous la forme $P = (X - z)(X - \bar{z})Q$. Le produit $(X - z)(X - \bar{z})$ est à valeurs positives (il ne peut s'annuler et tend vers $+\infty$ du côté des infinis), donc Q aussi, et on conclut de la même façon que dans le premier cas.

Problème (***)

1. La fonction est définie si $\sin(x) \neq 0$, donc sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur chacun de ses intervalles de définition, π -périodique (comme dans le cas de la tangente, numérateur et dénominateur changent tous les deux de signe si on ajoute π à la variable), et impaire. Sa dérivée est donnée par $\cotan'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$, qui est toujours négatif. La fonction \cotan est donc strictement décroissante sur $]0, \pi[$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotan(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cotan(x) = -\infty$ (le sinus est négatif mais le cosinus positif à cet endroit), la fonction est bien bijective de $]0, \pi[$ vers \mathbb{R} . Une allure de la courbe représentative sur quelques périodes :



2. (a) Attention, les termes de plus haut degré vont se simplifier lors de la soustraction : en appliquant la formule du binôme de Newton, $Q_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1 - (-1)^{n-k})$. Le terme en X^n s'annule donc mais celui en X^{n-1} est égal à $2 \binom{n}{n-1} X^{n-1} = 2nX^{n-1}$. Le polynôme Q_n est donc de degré $n - 1$ et de coefficient dominant $2n$.

- (b) Le polynôme Q_n s'annule lorsque $\left(\frac{X+1}{X-1}\right)^n = 1$ (il ne peut pas s'annuler pour $X = 1$ puisque $Q_n(1) = 2^n$). En exploitant nos connaissances sur les racines n -èmes complexes de l'unité, on a donc $\frac{X+1}{X-1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, pour un certain entier $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. On obtient alors $X+1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, soit $X = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}$, en éliminant la valeur $k = 0$ pour laquelle le dénominateur s'annulerait. Un petit coup de factorisation par l'angle moitié (le facteur $e^{i\frac{\pi}{n}}$ se simplifie entre numérateur et dénominateur) permet alors de trouver $X = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{2 \cos(\frac{k\pi}{n})}{2i \sin(\frac{k\pi}{n})} = -i \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$, exactement ce qui était demandé par l'énoncé.

- (c) Les valeurs $\frac{k\pi}{n}$ obtenues à la question précédente appartiennent toutes à l'intervalle $]0, \pi[$ et sont bien entendues distinctes, donc les valeurs de X également puisque la fonction cotan est bijective sur cet intervalle. Le polynôme étant de degré n , il admet donc n racines simples, et connaissant son coefficient dominant, on peut écrire sa factorisation :
- $$Q_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + i \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right).$$

3. (a) C'est du calcul bête et même pas vraiment méchant : $P_1 = \sum_{k=0}^1 \binom{3}{2k} X^k = 1 + 3X$, puis

$$P_2 = \sum_{k=0}^2 \binom{5}{2k} X^k = 1 + 10X + 5X^2, \text{ et enfin } P_3 = \sum_{k=0}^3 \binom{7}{2k} X^k = 1 + 21X + 35X^2 + 7X^3.$$

On peut bien entendu recourir au triangle de Pascal ou à la définition pour calculer les coefficients binômiaux les plus exotiques, par exemple $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$.

- (b) Comme on l'a déjà vu plus haut, on peut écrire $Q_{2n+1}(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k (1 - (-1)^{2n+1-k})$. Toutes les valeurs impaires de k vont donner un coefficient nul, et pour les valeurs paires, la parenthèse vaudra simplement 2. En posant $k = 2j$, la variable j va prendre exactement toutes les valeurs entières entre 0 et n (et des valeurs demi-entières qu'on peut oublier puisque ce sont celles qui correspondent aux termes nuls de la somme initiale), ce qui permet d'écrire $Q_{2n+1}(X) = 2 \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j} X^{2j}$, ce qui est exactement égal à $2P_n(X^2)$.
- (c) D'après la relation précédente, si a est racine de Q_{2n+1} , alors a^2 est racine de P_n . Les calculs de la question 2 assurent alors que les nombres $\left(-i \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = -\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ sont racines de P_n pour tous les entiers k compris entre 1 et $2n$. Cela fait beaucoup trop de racines pour un polynôme qui est manifestement de degré n , mais en fait ces valeurs sont deux à deux égales : de façon générale, $\cotan(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} = -\cotan(x)$, ce qui donnera évidemment des valeurs identiques après passage au carré. Or, $\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1} = \pi - \frac{k\pi}{2n+1}$, donc les racines obtenues pour P_n seront les mêmes lorsque $k = 1$ et $k = 2n$; lorsque $k = 2$ et $k = 2n - 1$ et ainsi de suite. Il suffit donc de garder les valeurs de k comprises entre 1 et n pour obtenir n racines distinctes (là, les cotangentes sont toutes strictement positives et distinctes, donc leurs carrés aussi). Puisqu'on a obtenu n racines distinctes pour un polynôme de degré n , celui-ci admet nécessairement des racines simples.
- (d) En notant a_k le coefficient de degré k du polynôme P_n , les relations coefficients-racines pour le polynôme P_n nous permettent d'affirmer que la somme de ces racines est égale à $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$. Ici, on calcule $a_n = \binom{2n+1}{2n} = 2n+1$, et $a_{n-1} = \binom{2n+1}{2n-2} = \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!3!} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$, ce qui donne bien $-\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{n(2n-1)}{3}$. On en déduit comme annoncé que $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 = \frac{n(2n-1)}{3}$.
4. (a) On peut appliquer des méthodes très classiques d'études de fonctions : en posant $g(x) = \sin(x) - x$, on a $g'(x) = \cos(x) - 1$ qui est négative (sur \mathbb{R} tout entier d'ailleurs), donc la fonction g est décroissante et vérifie $g(0) = 0$, elle est donc strictement négative sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. De même, si on pose $h(x) = \tan(x) - x$, on aura $h'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) > 0$, donc h est croissante et vérifie $h(0) = 0$, la fonction est positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- (b) Tous les termes de l'encadrement précédent sont positifs, on peut l'élever au carré : $0 < \sin^2(x) \leq x^2 \leq \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$. On peut maintenant passer le tout à l'inverse en retournant le sens des inégalités : $\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$. Le membre de gauche est égal à $\cotan^2(x)$, celui de droite peut s'écrire $\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \cotan^2(x)$, d'où l'encadrement demandé.

(c) Remplaçons donc : $\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + 1$, ce qu'on peut écrire $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + 1\right)$. On additionne tous ces encadrements pour k variant entre 1 et n (les valeurs des angles $\frac{k\pi}{2n+1}$ sont alors bien comprises dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, et on utilise bien sûr le résultat de la question 3.d pour simplifier les sommes : $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right)$. Les membres extrêmes sont des fractions rationnelles, on calcule leur limite quand n tend vers $+\infty$ en ne gardant que les termes de plus haut degré, ce qui donne dans les deux cas $\frac{\pi^2}{3} \times \frac{2n^2}{4n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (le n ajouté dans le membre de droite ne change pas la limite). D'après le théorème des gendarmes, on a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. (a) Allons-y pour une petite récurrence, puisqu'on nous le demande si gentiment. Lorsque $n = 1$, l'égalité se résume à $z_1^2 = z_1^2$, ce qui a l'air d'être vrai. Supposons-la vérifiée au rang n , alors $\left(\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right)^2 = \left(z_{n+1} + \sum_{k=1}^n z_k\right)^2 = z_{n+1}^2 + 2z_{n+1} \sum_{k=1}^n z_k + \sum_{k=1}^n z_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j$, en appliquant l'hypothèse de récurrence pour « développer » le carré du deuxième terme. On peut ajouter le z_{n+1}^2 à la deuxième somme en faisant simplement monter l'indice jusqu'à $n+1$, mais on peut également ajouter les termes de la somme $2 \sum_{k=1}^n z_k z_{n+1}$ à la dernière somme, ce qui revient exactement à faire augmenter l'indice j jusqu'à $n+1$ au lieu de n (puisque'il ne manque que les doubles produits avec z_{n+1} pour pouvoir faire cela). On obtient alors exactement la formule au rang $n+1$.

(b) Posons donc $z_k = \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, on sait déjà que $\sum_{k=1}^n z_k = \frac{n(2n-1)}{3}$. La formule démontrée à la question précédente donne alors $\sum_{k=1}^n z_k^2 = \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j$. Cette dernière somme double est égale, d'après les relations coefficients-racines, à $\frac{a_{n-2}}{a_n}$ (avec les mêmes notations que précédemment). Or, $a_{n-2} = \frac{2n+1}{2n-4}$
 $= \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!} = \frac{n(n-1)(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{30}$, donc $2 \frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15}$, dont on déduit que $\sum_{k=1}^n \cotan^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^n z_k^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{9} - \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15}$.

(c) On élève au carré l'encadrement de la question 4.b : $\frac{\pi^4}{(2n+1)^4} \cotan^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{k^4} \leq \frac{\pi^4}{(2n+1)^4} \left(1 + 2 \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + \cotan^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$. En additionnant ces encadrements et en exploitant la question précédente, la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4}$ est donc minorée par

$\frac{\pi^4}{(2n+1)^4} \left(\frac{n^2(n-1)^2}{9} - \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15} \right)$ qui admet pour limite (on ne garde à nouveau que les termes de plus haut degré) $\frac{\pi^4}{16n^4} \left(\frac{4n^4}{9} - \frac{4n^4}{15} \right) = \frac{\pi^4}{4} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{15} \right) = \frac{\pi^4}{90}$. De même, la somme est majorée par une expression encore plus dégueulasse, mais dont la limite est la même (aucun terme en n^4 n'apparaît parmi les termes rajoutés par rapport au membre de gauche), ce qui permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

- (d) Quoi, c'est déjà fini ? On n'est même pas assez courageux pour aller un peu plus loin et obtenir $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^6}$? Les plus curieux d'entre vous seront contents d'apprendre qu'elle vaut $\frac{\pi^6}{945}$.