

# Feuille d'exercices n° 11 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

10 janvier 2024

## Exercice 1 (\*)

1. Soit donc une matrice  $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ . On a alors  $AB = \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \end{pmatrix}$ .

Pour que la matrice  $AB$  soit nulle, il faut donc avoir  $d = e = f = 0$ , puis  $a = b = c = 0$ . Autrement dit, les deux premières lignes de  $B$  doivent être nulles, et la troisième est quelconque.

2. D'après la question précédente,  $C$  doit être de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$ . Si on effectue le produit

$CA$  pour une telle matrice, on obtient  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g+2h & 2g+h+i & 0 \end{pmatrix}$ . Pour que ce produit soit

nul, il faut donc avoir  $g = -2h$  et  $i = -2g - h = 3h$ , soit  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2h & h & 3h \end{pmatrix}$ , le réel  $h$  étant quelconque.

## Exercice 2 (\* à \*\*)

- Soit  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  une matrice dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on calcule  $AM = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix}$  et  $MA = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$ . Pour que les deux matrices soient égales, il faut que leurs coefficients soient égaux deux à deux, ce qui nous amène à résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2z = x + 3y \\ y + 2t = 2x + 4y \\ 3x + 4z = z + 3t \\ 3y + 4t = 2z + 4t \end{cases}$$

Les deux équations extrêmes sont équivalentes à  $z = \frac{3}{2}y$ , et les deux du milieu se ramènent alors à la même équation  $x + z = t$ . Les solutions sont donc tous les quadruplets de la forme  $\left\{ x, y, \frac{3}{2}y, x + \frac{3}{2}y \right\}$ , où  $x$  et  $y$  sont deux réels quelconques. Autrement, la matrice  $M$  est de

la forme  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$ .

- Posons donc  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ . On calcule  $MB = \begin{pmatrix} a+3b-2c & -b+c & a+2b-c \\ d+3e-2f & -e+f & d+2e-f \\ g+3h-2i & -h+i & g+2h-i \end{pmatrix}$

et  $BM = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ 3a-d+2g & 3b-e+2g & 3c-f+2i \\ -2a+d-g & -2b+e-h & -2c+f-i \end{pmatrix}$ , ce qui donne le sublimissime système :

$$\begin{cases} a + 3b - 2c = a & + g \\ -b + c = b & + h \\ a + 2b - c = c & + i \\ d + 3e - 2f = 3a - d + 2g \\ -e + f = 3b - e + 2h \\ d + 2e - f = 3c - f + 2i \\ g + 3h - 2i = -2a + d - g \\ -h + i = -2b + e - h \\ g + 2h - i = -2c + f - i \end{cases}$$

Pour résoudre ce genre de système a priori immonde, il vaut mieux commencer par tout exprimer en fonction des coefficients de la première ligne  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Les trois premières équations donnent ainsi  $g = 3b - 2c$ ,  $h = c - 2b$  et  $i = a + 2b - 2c$ . Ensuite, la huitième équation donne  $e = 2b + i = a + 4b - 2c$ , la dernière équation donne  $f = g + 2h + 2c = -b + 2c$ , et la sixième  $d = 2a + 2g + 3h - 2i = -4b + 3c$ . Il reste trois équations à traiter, en remplaçant chaque variable par l'expression obtenue : la quatrième devient  $-4b + 3c + 3a + 12b - 6c + 2b - 4c = 3a + 4b - 3c + 6b - 4c$ , soit  $3a + 10b - 7c = 3a + 10b - 7c$ , qui est toujours vérifiée, la cinquième donne  $-a - 4b + 2c - b + 2c = 3b - a - 4b + 2c + 2c - 4b$ , soit  $-a - 5b + 4c = -a - 5b + 4c$  qui est également toujours vrai, et enfin la septième donne  $3b - 2c + 3c - 6b - 2a - 4b + 4c = -2a - 4b + 3c - 3b + 2c$ , soit  $-2a - 7b + 5c = -2a - 7b + 5c$ , qui est encore une fois toujours vrai. Les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$

peuvent donc être choisis quelconques, et  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -4b + 3c & a + 4b - 2c & -b + 2c \\ 3b - 2c & c - 2b & a + 2b - 2c \end{pmatrix}$ .

- C'est évidemment le gag de la liste : toutes les matrices (carrées d'ordre  $n$ ) commutent avec  $I_n$ .
- En notant  $M$  une matrice carrée quelconque d'ordre 3 (mêmes notations que pour la matrice  $B$ ), on trouve  $MC = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$  et  $CM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On obtient donc les conditions  $b = h = d = f = 0$ , soit  $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$ .

Si une matrice  $M$  commute avec toutes les matrices diagonales, elle commute en particulier avec la matrice ayant un unique coefficient non nul  $a_{ii} = 1$ . Or, la multiplication à gauche par cette matrice ne conserve que la colonne numéro  $i$  de la matrice  $M$ , et la multiplication à droite ne conserve que la ligne numéro  $i$ . Si on veut que les deux soient égales, tous les coefficients de la ligne et de colonne numéro  $i$  doivent être nuls, à l'exception du coefficient diagonal  $m_{ii}$  qui est commun aux deux matrices. En faisant ce calcul avec toutes les valeurs possibles de  $i$ , on se rend donc compte que la matrice  $M$  est nécessairement diagonale. Réciproquement, une matrice diagonale commute avec toutes les autres matrices diagonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Pour le cas des matrices symétriques, ce n'est en fait pas vraiment plus dur. Toutes les matrices diagonales étant symétriques, la matrice  $M$  doit d'après ce qui précède être diagonale. Mais cette fois-ci, ça ne suffit pas. Prenons donc comme matrice diagonale particulière la matrice vérifiant  $a_{ij} = a_{ji} = 1$  (pour des valeurs distinctes de  $i$  et de  $j$ ), et ayant tous ses autres coefficients nuls. Quand on multiplie cette matrice à gauche par une matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , il ne reste comme coefficients non nuls que  $\lambda_i$  en position  $(i, j)$  et  $\lambda_j$  en position  $(j, i)$ . Au contraire, quand on fait le produit à droite,  $\lambda_i$  se trouve en position  $(j, i)$  et  $\lambda_j$  en position  $(i, j)$ . Si

on veut que les deux matrices soient égales, on doit avoir  $\lambda_i = \lambda_j$ . Comme cela doit être vrai pour toutes les valeurs de  $i$  et de  $j$ , tous les coefficients diagonaux de  $M$  sont en fait égaux, ce qui signifie qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $M = \lambda I$ . Réciproquement, une telle matrice commute certainement avec toutes les matrices symétriques puisqu'elle commute avec toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 3 (\*)

C'est en fait très simple, le produit est symétrique si  $AB = {}^t(AB)$ , soit  $AB = {}^t B^t A$ . Comme les deux matrices sont supposées symétriques, cela revient à dire que  $AB = BA$ , autrement dit que les matrices commutent.

### Exercice 4 (\*)

On peut écrire toutes les matrices appartenant à  $A$  sous la forme  $aI_3 + bJ + cK$ , en notant  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . L'ensemble  $A$  contient bien entendu les deux éléments neutres (on prend  $a = b = c = 0$  pour obtenir la matrice nulle,  $a = 1$  et  $b = c = 0$  pour la matrice  $I_3$ ). Il est stable par somme de façon évidente :  $aI_3 + bJ + cK + a'I_3 + b'J + c'K = (a+a')I_3 + (b+b')J + (c+c')K \in A$ , et par passage à l'opposé de façon tout aussi évidente :  $-(aI_3 + bJ + cK) = -aI_3 - bJ - cK$ . En fait, la seule chose qui n'a rien d'évident est la stabilité par produit matriciel. Remarquons que  $I_3J = JI_3 = J$ ,  $I_3K = KI_3 = K$  (ça c'est évident), mais surtout  $J^2 = K$ ,  $K^2 = J$  (calculs faciles), et  $JK = KJ = I_3$  (là aussi calcul très facile). On en déduit en développant tout très brutalement que  $(aI_3 + bJ + cK)(a'I_3 + b'J + c'K) = (aa'I_3 + ab'J + ac'K + ba'J + bb'K + bc'I_3 + ca'K + cb'I_3 + cc'J) = (aa' + bc' + cb')I_3 + (ab' + ba' + cc')J + (ac' + bb' + ca')K$ . Ce produit appartient bien à l'ensemble  $A$ , ce qui prouve que ce dernier est un sous-anneau de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , et en plus on obtiendrait le même résultat en échangeant les deux matrices multipliées, ce qui prouve que le produit matriciel restreint à l'ensemble  $A$  devient commutatif.

### Exercice 5 (\*\*)

Prouvons la formule donnée par récurrence : pour  $k = 0$ , c'est évident :  $AI - IA = 0$ . Supposons-la vérifiée au rang  $k$ , alors  $AB^{k+1} - B^{k+1}A = AB^k B - B^{k+1}A = (AB^k - B^k A)B + B^k AB - B^k BA = kB^k B + B^k(AB - BA) = kB^{k+1} + b^k B = (k+1)B^{k+1}$ , ce qui prouve la formule au rang  $k+1$ . Par principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout entier  $k$ . Par linéarité de la trace, on a alors  $\text{Tr}(kB^k) = \text{Tr}(AB^k) - \text{Tr}(B^k A) = 0$  puisque le calcul de la trace d'un produit ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue ce produit. On en déduit que  $\text{Tr}(B^k) = 0$ .

### Exercice 6 (\*\*)

Commençons par prendre la trace des deux côtés de l'équation :  $\text{Tr}(X) + \text{Tr}(X)\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ , une condition nécessaire est donc  $\text{Tr}(X)(1 + \text{Tr}(A)) = \text{Tr}(B)$ . Si  $\text{Tr}(A) \neq -1$ , on en déduit que  $\text{Tr}(X) = \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}$ . Par ailleurs, on doit avoir  $X = B - \lambda A$ , avec en l'occurrence  $\lambda = \text{Tr}(X)$ . Considérons donc une matrice de la forme  $X = B - \lambda A$ , elle vérifie  $\text{Tr}(X) = \text{Tr}(B) - \lambda \text{Tr}(A)$ . On doit donc avoir, pour qu'une telle matrice soit solution,  $\text{Tr}(B) - \lambda \text{Tr}(A) = \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}$ , soit  $\lambda \text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) \left(1 - \frac{1}{1 + \text{Tr}(A)}\right) = \text{Tr}(B) \times \frac{\text{Tr}(A)}{1 + \text{Tr}(A)}$ , donc  $\lambda = \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}$  (sauf si  $\text{Tr}(A) = 0$ ). La seule solution possible est donc  $X = B - \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}A$ . On vérifie sans problème qu'une telle

matrice est effectivement solution (unique, donc) du problème. Si  $\text{Tr}(A) = 0$ , on doit simplement avoir  $\text{Tr}(X) = 0$ , ce qui sera toujours le cas lorsque  $X = B - \lambda A$ . L'équation de départ s'écrit alors  $B - \lambda A = B$ , donc on doit tout de même avoir  $\lambda = 0$  et la solution unique est  $X = B$ . Enfin, si  $\text{Tr}(A) = -1$ , la condition donnée initialement ne peut être vérifiée que si  $\text{Tr}(B) = 0$ . Dans le cas contraire, il ne peut pas y avoir de solution à l'équation. Si  $\text{Tr}(A) = -1$  et  $\text{Tr}(B) = 0$ , en posant  $X = B - \lambda A$ , on aura  $\text{Tr}(X) = \lambda$ , donc l'équation s'écrit  $B - \lambda A + \lambda A = B$ . Cette condition est manifestement vérifiée quelle que soit la valeur de  $\lambda$ , c'est donc le seul cas où on a une infinité de solutions, en l'occurrence toutes les matrices de la forme  $B - \lambda A$ , pour  $\lambda$  parcourant  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 7 (\*\*\*)

1. On calcule facilement  $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$ . Rappelons la méthode la plus simple pour trouver ensuite le polynôme annulateur. On peut toujours le prendre unitaire et chercher deux constantes telles que  $A^2 = \alpha A + \beta I$ . Le coefficient  $\beta$  est simplement le coefficient de proportionnalité entre les coefficients non diagonaux de  $A$  et de  $A^2$ , ici 5. Il ne reste alors plus qu'à constater que  $A^2 - 5A = -4I$ , soit  $A^2 - 5A + 4I = 0$ . Le polynôme recherché est donc  $P = X^2 - 5X + 4$ .
2. En reprenant l'égalité obtenue à la question précédente,  $A(A - 5I) = -4I$  ou encore  $A\left(-\frac{1}{4}A + \frac{5}{4}I\right) = I$ . La matrice  $A$  est donc inversible, d'inverse  $A^{-1} = \frac{5}{4}I - \frac{1}{4}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .
3. Le polynôme se factorise immédiatement sous la forme  $(X - 1)(X - 4)$  puisque 1 est racine évidente (mais si vous préférez perdre votre temps à calculer un discriminant, naturellement, personne ne vous en empêchera). La division euclidienne sera de la forme  $X^n = PQ + R$ , où  $d^\circ(R) < 2$ , soit  $R = a_n X + b_n$ . Évaluons cette égalité pour les racines du polynôme, qui ont l'avantage de vérifier  $P(x) = 0$  et donc d'annuler le terme en  $PQ$  :  $1 = R(1) = a_n + b_n$ , et  $4^n = 4a_n + b_n$ . La différence des deux équations donne  $3a_n = 4^n - 1$ , soit  $a_n = \frac{4^n - 1}{3}$ , dont on déduit que  $b_n = 1 - a_n = \frac{4 - 4^n}{3}$ .
4. D'après la question précédent,  $A^n = P(A)Q(A) + R(A)$ . Comme  $P(A) = 0$ , il ne reste que  $A^n = a_n A + b_n I = \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{4 - 4^n}{3}I$  (on vérifie aisément que la formule donne une valeur correcte de  $A^2$ , inutile de préciser les coefficients de  $A^n$ , ça n'a pas grand intérêt).

### Exercice 8 (\*\*)

On calcule aisément  $J^2 = nJ$  (la matrice ne contient que des  $n$ ), puis  $J^3 = n^2J$ , et on conjecture que  $J^k = n^{k-1}J$ , ce qui se prouve sans problème par récurrence : c'est vrai au rang 1, et si on le suppose vrai au rang  $k$ , alors  $J^{k+1} = J \times J^k = J \times n^{k-1}J = n^{k-1}J^2 = n^k J$ . On constate que la matrice  $A$  dont on cherche les puissances peut s'écrire sous la forme  $A = 2I - J$  (où  $J$  désigne évidemment ici une matrice carrée d'ordre 3, on aura donc  $J^k = 3^{k-1}J$ ). Les matrices  $I$  et  $J$  commutant certainement,

on peut appliquer la formule du binôme de Newton :  $A^n = (2I - J)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 2^k I^k (-J)^{n-k} =$

$\left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k (-1)^k 3^{n-k-1} \right) J + 2^n I$  (on est obligés d'isoler le terme numéro  $n$  de la somme car la formule pour les puissances de  $J$  ne fonctionne pas pour  $J^0$ ). Dans la parenthèse, on reconnaît presque une formule du binôme (sur les réels cette fois-ci) à deux détails près : il faudrait sortir un facteur  $\frac{1}{3}$  pour avoir un  $(-2)^k 3^{n-k}$ , et surtout il manque le fameux terme numéro  $n$ , qui serait ici égal à  $(-2)^n$ .

On peut donc écrire  $A^n = \frac{1}{3} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (-3)^{n-k} - (-2)^n \right) J + 2^n I = 2^n I + \frac{(-1)^n - (-2)^n}{3} J$ . On vérifie que, pour  $n = 1$ , on retrouve  $A = 2I - J$ . Pour  $n = 2$ , on devrait avoir  $A^2 = 4I - J$ , ce qui est effectivement le cas.

### Exercice 9 (\*\*)

Première méthode, qui fonctionnera toujours pour une matrice d'ordre 2 : chercher un polynôme annulateur de degré 2. On calcule donc  $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = 2A - I$ . La matrice est donc annulée par le polynôme  $P = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ , cherchons à écrire la division euclidienne de  $X^n$  par  $P$ , on sait qu'elle sera de la forme  $X^n = PQ + a_n X + b_n$ . On ne dispose ici que d'une seule racine, qui nous donne la condition  $1 = a_n + b_n$ . pour en obtenir une deuxième, il faut penser à dériver :  $nX^{n-1} = P'Q + PQ' + a_n$ , avec  $P(1) = P'(1) = 0$ , donc  $n = a_n$ . On trouve donc  $a_n = n$  et  $b_n = 1 - n$ , soit  $A^n = nA + (1 - n)I$ .

Autre possibilité : écrire  $A = I + B$ , où  $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ . On constate que  $B^2 = 0$  (quelle chance!), les matrices  $I$  et  $B$  commutent évidemment donc, par la formule du binôme de Newton,  $A^n = (B + I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k I^{n-k} = I + nB$  (tous les termes suivants sont nuls). Comme  $B = A - I$ , on retrouve  $A^n = I + n(A - I) = nA + (1 - n)I$ .

Allez, une troisième méthode pour la route, on calcule  $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$  puis  $A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ 12 & -11 \end{pmatrix}$  et on conjecture pour  $A^n$  une matrice de la forme  $A^n = \begin{pmatrix} a_n + 1 & -a_n \\ a_n & -a_n + 1 \end{pmatrix}$ . Prouvons cette formule par récurrence : c'est vrai au rang 1 en posant  $a_1 = 4$ , et en le supposant vérifié au rang  $n$ , alors  $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n + 1 & -a_n \\ a_n & -a_n + 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 5 & -a_n - 4 \\ a_n + 4 & -a_n + 3 \end{pmatrix}$ , ce qui est bien de la forme souhaitée avec  $a_{n+1} = a_n + 4$ . La suite  $(a_n)$  est par ailleurs arithmétique de raison 4, donc  $a_n = a_1 + 4(n - 1) = 4n$ . On en déduit directement que  $A^n = \begin{pmatrix} 4n + 1 & -4n \\ 4n & -4n + 1 \end{pmatrix}$  (on peut aussi directement conjecturer la forme exacte de la matrice  $A^n$  à partir de ses premières puissances).

### Exercice 10 (\*\*\*)

1. On commence par un peu de calcul :  $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A^3 = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 44 & -18 & -26 \\ -26 & 9 & 17 \end{pmatrix}$ .

Il est désormais facile de vérifier l'égalité demandée.

2. On va bien sûr procéder par récurrence. Notons  $P_k$  la propriété « Il existe deux réels  $a_k$  et  $b_k$  tels que  $A^k = a_k A^2 + b_k A$  ». Pour une fois on initialise la récurrence pour  $k = 2$  :  $P_2$  est bien vérifiée en posant  $a_2 = 1$  et  $b_2 = 0$  (on a bien  $A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A$ ). Supposons  $P^k$  vérifiée, on a alors  $A^{k+1} = A \times A^k = A \times (a_k A^2 + b_k A) = a_k A^3 + b_k A^2 = a_k (6A - A^2) + b_k A^2 = (b_k - a_k) A^2 + 6a_k A$ , qui est bien de la forme demandée, ce qui achève la récurrence.
3. D'après la question précédente, on a les relations suivantes :  $a_{k+1} = b_k - a_k$  et  $b_{k+1} = 6a_k$ . On a donc  $b_k = 6a_{k-1}$  ce qui donne en remplaçant dans la première relation  $a_{k+1} = -a_k + 6a_{k-1}$ , récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique  $x^2 + x - 6 = 0$ , dont le discriminant vaut  $\Delta = 1 + 24 = 25$ , et admet donc deux racines  $r = \frac{-1 + 5}{2} = 2$  et  $s = \frac{-1 - 5}{2} = -3$ . On a donc  $a_k = \alpha 2^k + \beta (-3)^k$ , avec  $a_2 = 4\alpha + 9\beta = 1$  et  $a_3 = 8\alpha - 27\beta = -1$ . En multipliant la

première équation par 2 et en lui retranchant la deuxième, on obtient  $45\beta = 3$ , soit  $\beta = \frac{1}{15}$ , puis  $\alpha = \frac{1-9\beta}{4} = \frac{1-\frac{3}{5}}{4} = \frac{1}{10}$ . On a donc  $a_k = \frac{2^{k-1} - (-3)^{k-1}}{5}$ , et  $b_k = 6 \times \frac{2^{k-2} - (-3)^{k-2}}{5}$ .

4. On se contentera d'écrire  $A^k = \begin{pmatrix} 6a_k - 2b_k & -3a_k + b_k & -3a_k + b_k \\ -8a_k + 6b_k & 6a_k - 2b_k & 2a_k - 4b_k \\ 2a_k - 4b_k & -3a_k + b_k & a_k + 3b_k \end{pmatrix}$  sans préciser les valeurs. Pour  $k = 1$ , on obtient avec les formules de la question précédente  $a_1 = 0$  et  $b_1 = 1$ , ce qui donne  $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$ , ce qui est indiscutablement vrai. Et pour  $k = 0$ , on obtient  $a_0 = \frac{1}{6}$  et  $b_0 = \frac{1}{6}$ , et là ça ne marche plus...

## Exercice 11 (\*)

Un peu de motivation, six pivots de Gauss, ça va prendre quelques pages de calcul, mais ça ne peut pas faire de mal.

$$\begin{array}{l}
 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
 \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\
 \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + 3L_3 \end{array} \\
 \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -8 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\
 \\
 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow -L_2/2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \\
 \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

La matrice  $A$  est donc inversible, et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{array}{l}
B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 9L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\
\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/18 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/9 \\ L_3 \leftarrow L_3/9 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}
\end{array}$$

La matrice  $B$  est donc inversible, et  $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$ .

$$\begin{array}{l}
C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

La matrice  $C$  n'est pas inversible.

$$\begin{array}{l}
D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\
\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -4 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/4 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

La matrice  $D$  est donc inversible, et  $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .



$$\begin{array}{l}
E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
L_2 \leftrightarrow L_1 \\
L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\
L_4 \leftarrow L_3 - L_4 \\
L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\
L_1 \leftarrow L_4 - L_1 \\
L_3 \leftrightarrow L_4 \\
L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\
L_2 \leftrightarrow L_1 \\
L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\
L_4 \leftarrow L_3 - L_4
\end{array}$$

La matrice  $E$  est donc inversible, et  $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On peut tricher un peu pour la matrice  $F$  en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, qui ne bougeront de toute façon pas pendant les calculs (sauf pour la toute dernière étape où on divisera la dernière ligne par 3, ce qui fera apparaître un  $\frac{1}{3}$  dans le coin inférieur droit de la matrice inverse).

$$\begin{array}{ccc}
F' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \\
\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & 
\end{array}$$

La matrice  $F$  est donc inversible, et  $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .

## Exercice 12 (\*\*)

Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice  $P$  :

$$\begin{array}{ccc}
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 - L_3 \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & 
\end{array}$$

La matrice  $P$  est bien inversible, d'inverse  $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

On calcule sans enthousiasme  $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ , puis  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ , matrice

diagonale que nous noterons  $D$ . On prouve ensuite par récurrence que  $A^n = PD^nP^{-1}$  : c'est vrai pour  $n = 1$ , puisque  $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$ , et supposant la formule vérifiée pour  $A^n$ , on aura  $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ , ce qui achève la récurrence. Donc

$$A^n = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ soit } A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+6^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{4^n-6^n}{2} & \frac{6^n+8^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{6^n-4^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{4^n+8^n}{2} \end{pmatrix}.$$

### Exercice 13 (\*\*)

Si  $A$  est nilpotente, il existe un entier  $k$  tel que  $A^{k+1} = 0$ . Or, on constate que  $(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^k) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \dots + A^k - A^{k+1} = I - A^{k+1} = I$ , donc  $I - A$  est

inversible, d'inverse  $I + A + A^2 + \dots + A^k$ . On a  $A = I - M$ , avec  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Un rapide

calcul donne  $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M^3 = 0$ . D'après ce qui précède, on a donc  $A^{-1} = I + M +$

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . De même on a  $B = I - N$  avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On calcule

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ puis } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

enfin  $N^5 = 0$ , donc  $B^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Cette dernière

formule laisse supposer qu'on a peut-être pas utilisé la meilleure méthode pour inverser  $B$ , je vous laisse chercher d'autres façons d'y parvenir plus rapidement si vous le souhaitez.

### Exercice 14 (\*\*)

Ce n'est en fait pas vraiment plus compliqué que pour une matrice d'ordre 3 ou 4, on applique les différentes étapes du pivot mais on peut difficilement les écrire explicitement. En l'occurrence, on va faire successivement les opérations élémentaires  $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ ,  $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_{n-1}$ ,  $L_{n-3} \leftarrow L_{n-3} - L_{n-2}$ , ...,  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ . On obtient ainsi la matrice identité. Quand on effectue les mêmes opérations en parallèle à partir de la matrice  $I_n$ , on transforme successivement les lignes de la matrice :  $L_{n-1}$  devient  $0 \dots 1 - 1$ ,  $L_{n-2}$  devient  $0 \dots 1 - 1 1$ , etc jusqu'à  $L_1$  qui devient  $1 - 1 1 - 1 \dots (-1)^{n-1}$ . Finalement, la matrice est inversible (ce n'est pas une surprise puisqu'elle est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale), d'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & & & \dots & & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & & \dots & & (-1)^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 15 (\*\*)**

Soyons fous et faisons le calcul avec le pivot!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_5 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_6 \\ L_6 \leftarrow L_6 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_5 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_6 \\ L_6 \leftarrow L_6 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_6 \leftarrow L_2 - 6L_6$$



$$\begin{pmatrix} -126 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -126 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & -22 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 20 & -22 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 20 & -22 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ -22 & -1 & -1 & -1 & -1 & 20 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à tout diviser par  $-126$  pour obtenir le passionnant résultat :

$$A^{-1} = \frac{1}{126} \begin{pmatrix} -20 & 22 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -20 & 22 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -20 & 22 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -20 & 22 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -20 & 22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix}$$

### Exercice 16 (\*\*\*)

- On calcule simplement  $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ , puis on constate que  $M_a = I_3 + aU + \frac{a^2}{2}U^2$ .
- L'application est surjective par définition même de l'ensemble  $G$ . Et elle est trivialement injective : si  $a \neq b$ ,  $M_a \neq M_b$  puisque par exemple le dernier coefficient de la première ligne n'est pas le même dans les deux matrices.
- Calculons :  $M_a M_b = \begin{pmatrix} 1 + ab - ab & b + a + \frac{ab^2}{2} - \frac{ab^2}{2} & b + \frac{ab^2}{2} + a - \frac{ab^2}{2} \\ a + b + \frac{ba^2}{2} - \frac{ba^2}{2} & ab + 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b^2}{4} & ab + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2b^2}{4} \\ -a - \frac{ba^2}{2} - b + \frac{ba^2}{2} & -ab - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4} & -ab - \frac{a^2b^2}{4} + 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + b & a + b \\ a + b & 1 + \frac{(a+b)^2}{2} & \frac{(a+b)^2}{2} \\ -a - b & -\frac{(a+b)^2}{2} & 1 - \frac{(a+b)^2}{2} \end{pmatrix}$ . Autrement dit, on a exactement  $M_a M_b = M_{a+b}$ . La matrice  $M_a$  est en particulier toujours inversible, d'inverse  $M_{-a}$ , puisque  $M_a \times M_{-a} = M_0 = I_3$ .
- C'est un sous-ensemble de  $GL_3(\mathbb{R})$  (tous ses éléments sont inversibles) qui contient l'élément neutre  $I_3$ , est stable par produit matriciel (c'est le calcul de la question précédente) et par passage à l'inverse (là aussi démontré à la question 3). Il s'agit bien d'un sous-groupe.
- Une récurrence triviale permet de prouver que  $M_a^n = M_{na}$  : c'est vrai pour  $n = 0$ , et si on le suppose vrai au rang  $n$ , alors  $M_a^{n+1} = M_a^n \times M_a = M_{na} \times M_a = M_{na+a} = M_{(n+1)a}$ . Sinon, on peut utiliser une méthode plus sophistiquée en expliquant que la question 3 prouvé que l'application  $f$  est un isomorphisme de groupes de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $(G, \times)$ .

### Exercice 17 (\*\*)

- Utilisons la méthode du système en résolvant :  $\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x - y = b \\ -x + y + 2z = c \end{cases}$ . On peut additionner les deux équations extrêmes pour obtenir immédiatement  $3z = a + c$ , soit  $z = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c$ . Ensuite, on effectue par exemple l'opération  $L_2 - L_1$  qui donne l'équation  $x - z = b - a$ , soit

$x = z - a + b = -\frac{2}{3}a + b + \frac{1}{3}c$ , et on reporte dans la deuxième équation du système initial :  
 $y = 2x - b = -\frac{4}{3}a + b + \frac{2}{3}c$ . Le système ayant toujours une solution unique, la matrice est

inversible, et son inverse vaut  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Le plus simple est de commencer par calculer  $AP = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ , puis  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . La matrice  $D$  est bien diagonale.

3. On va procéder par récurrence. Pour  $n = 0$ , on a bien  $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$ . Supposons maintenant la formule vérifiée au rang  $n$ , et constatons que la définition  $D = P^{-1}AP$  implique  $A = PDP^{-1}$  (en multipliant à gauche par  $P$  et à droite par  $P^{-1}$ ). On peut alors écrire  $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ .

Il ne reste plus qu'à calculer le produit :  $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} (-1)^n & -2^n & 2^n \\ 2(-1)^n & -2^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & 2^n & 2^{n+1} \end{pmatrix}$ , puis  $A^n = PD^nP^{-1} =$

$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times (-1)^{n+1} + 5 \times 2^n & 3 \times (-1)^n - 3 \times 2^n & (-1)^n - 2^n \\ 4 \times (-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 6 \times (-1)^n - 3 \times 2^n & 2 \times (-1)^n - 2^{n+1} \\ 2 \times (-1)^n - 2^{n+1} & 3 \times (-1)^{n+1} + 3 \times 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+2} \end{pmatrix}$ .

4. En effectuant les opérations  $L_1 - L_2$  et  $L_1 + L_3$ , on obtient les deux équations  $x + z = 7$  et  $3x + 3z = 21$ , qui sont manifestement équivalentes. Le système n'est donc pas un système de Cramer, on peut simplement exprimer deux des variables en fonction de la troisième, par exemple  $z = 7 - x$ , puis en remplaçant dans la première équation initiale,  $5x - 3y - 7 + x = 5$ , donc  $3y = 6x - 12$  et  $y = 2x - 4$ . On peut alors écrire  $\mathcal{S} = \{(x, 2x - 4, 7 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Comme le système n'est pas de Cramer, sa matrice, qui est justement la matrice  $A + I_3$ , n'est pas inversible.

5. Pour changer, calculons donc :  $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ , puis  $A^3 = \begin{pmatrix} 14 & -9 & -3 \\ 12 & -10 & -6 \\ -6 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ . Les

coefficients en-dehors de la diagonale étant identiques entre  $A$  et  $A^2$ , et ceux sur la diagonale étant augmentés de 2 quand on passe de  $A$  à  $A^2$ , on en déduit facilement que  $A^2 = A + 2I$ . On peut aussi remarquer si on a du temps à perdre que  $A^3 = 3A + 2I$ .

6. On part de l'égalité  $A^2 = A + 2I$  et on isole la matrice identité :  $I = \frac{1}{2}(A^2 - A) = \frac{1}{2}A(A - I)$ . On en déduit directement que la matrice  $A$  est inversible et que son inverse est  $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) =$

$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ .

7. C'est évidemment une récurrence classique : au rang 0, la propriété est vraie en posant simplement  $a_0 = 0$  et  $b_0 = 1$  (et également au rang 1 en posant  $a_1 = 1$  et  $b_1 = 0$ , même si ça ne sert pas pour la récurrence). Supposons désormais la propriété vraie au rang  $n$ , alors en exploitant la relation de la question 5 on peut écrire  $A^{n+1} = A^n \times A = (a_nA + b_nI)A = a_nA^2 + b_nA = a_n(A + 2I) + b_nA = (a_n + b_n)A + 2a_nI$ . La propriété est donc héréditaire, avec de plus les relations de récurrence  $a_{n+1} = a_n + b_n$  et  $b_{n+1} = 2a_n$ .

8. En décalant la relation de récurrence précédente,  $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$ . La suite  $(a_n)$  est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique  $x^2 - x - 2 = 0$ . Cette équation admet pour racines évidentes  $x_1 = -1$  et  $x_2 = 2$ , on peut donc écrire  $a_n$  sous la forme  $\lambda \times (-1)^n + \mu \times 2^n$ , avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . En appliquant cette expression pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , on trouve les conditions  $\lambda + \mu = 0$  et  $-\lambda + 2\mu = 1$ , donc  $\lambda = -\mu$  et  $3\mu = 1$ , soit  $\mu = \frac{1}{3}$  et  $\lambda = -\frac{1}{3}$ . Autrement dit, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ , puis  $b_n = 2a_{n-1} = \frac{2^n + 2 \times (-1)^n}{3}$ . Enfin, on conclut :  $A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}A + \frac{2^n + 2 \times (-1)^n}{3}I$ . On peut écrire la matrice explicitement :  $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \times (-1)^n + 5 \times 2^n & 3 \times (-1)^n - 3 \times 2^n & (-1)^n - 2^n \\ -4 \times (-1)^n + 2^{n+2} & 6 \times (-1)^n - 3 \times 2^n & 2 \times (-1)^n - 2^{n+1} \\ 2 \times (-1)^n - 2^{n+1} & -3 \times (-1)^n + 3 \times 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+2} \end{pmatrix}$ .
- C'est exactement la même matrice que celle obtenue à la question 3 (encore heureux !).
9. Inutile de s'embêter avec les coefficients, la formule générale en fonction de  $A$  et de  $I$  suffit : pour  $n = -1$ , on devrait avoir  $a_{-1} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2}$  et  $b_{-1} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} - 2 \right) = -\frac{1}{2}$ . Autrement dit, on devrait avoir  $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$ , ce qui est bien le cas (cf question 6). La formule est donc valable pour  $n = -1$ .
10. On procède comme à la question précédente :  $a_{-2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{1}{4}$  et  $b_{-2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} + 2 \right) = \frac{3}{4}$ . On devrait donc avoir  $A^{-2} = -\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}I$ . Or on sait que  $A^2 = A + 2I$ , et  $(A + 2I) \left( -\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}I \right) = -\frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{2}A + \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I = -\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}I + \frac{1}{4}A + \frac{3}{2}I = I$ , ce qui prouve que la formule souhaitée correspond bien à l'inverse de  $A^2$ . La formule est donc toujours valable pour  $n = -2$  (en fait elle le reste pour tout entier relatif).
11. (a) En bourrinant salement et en posant  $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ , la condition  $DN = ND$  se traduit par  $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2b & 2c \\ -d & 2e & 2f \\ -g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ . Cinq des neuf équations ainsi obtenues (celles concernant  $a, e, f, h$  et  $i$ ) sont manifestement vraies, alors que les quatre autres impliquent tout aussi trivialement la nullité du coefficient correspondant. On conclut donc que toutes les matrices de la forme  $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$  commutent avec la matrice  $D$ .
- (b) C'est un calcul sans intérêt :  $ND = DN \Leftrightarrow P^{-1}MPD = DP^{-1}MP \Leftrightarrow MPD = PDP^{-1}MP \Leftrightarrow MPDP^{-1} = PDP^{-1}M \Leftrightarrow AM = MA$  puisque  $A = PDP^{-1}$ .
- (c) Comme  $M = PNP^{-1}$ , les questions précédentes impliquent que les matrices commutant avec  $A$  sont de la forme  $M = PNP^{-1}$ , où  $N$  est de la forme obtenue plus haut, qu'on peut écrire  $N = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . En notant  $M_1 = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times P^{-1}$  et ainsi de suite, on aura bien la forme souhaitée par l'énoncé. Le calcul explicite des matrices  $M_1, M_2, M_3, M_4$  et  $M_5$  a un intérêt à peu près nul. Donnons simplement  $M_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .



### Exercice 18 (\*\*\*)

1. Cela découle des propriétés calculatoires de la transposition :  $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$ , donc  $A^\top A$  est bien une matrice symétrique.
2. Par définition,  $AA^{-1} = I_n$ . En prenant la transposée de cette égalité, comme  $I_n$  est une matrice symétrique, on obtient  $(A^{-1})^\top A^\top = I_n$ . Or, par hypothèse,  $A^\top = A$ , ce qui prouve que  $(A^{-1})^\top$  est inverse de la matrice  $A$ , et donc égale à  $A^{-1}$  (unicité de l'inverse d'une matrice). La matrice  $A^{-1}$  est donc symétrique.
3. En notant  $B = A^\top A$ , on calcule  $B_{ii} = \sum_{k=1}^n (A^\top)_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$ . Il ne reste plus qu'à sommer ces sommes :  $\text{Tr}(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$ . Autrement dit, on calcule simplement la somme des carrés de tous les coefficients de la matrice  $A$ .

Si  $A$  est symétrique,  $\text{Tr}(A^2)$  correspond au calcul précédent, qui donne un résultat positif comme somme de carrés de nombres réels. De plus, si  $\text{Tr}(A^2) = 0$ , tous les nombres  $a_{ki}^2$  sont nuls, ce qui n'est en effet le cas que pour la matrice nulle.

4. Calculons donc  $A(B - C)A = ABA - ACA = I_n A - AI_n = A - A = 0$ . Si on multiplie cette égalité à gauche par  $C$  puis à droite par  $B$ , on en déduit  $(B - C)A = 0$  puis  $B - C = 0$ , ce qui prouve que  $B = C$ . La matrice  $A$  est donc inversible, d'inverse  $B$ .
5. Si  $M$  est solution de l'équation (E), elle vérifie les hypothèses de la question précédente en posant  $B = M^\top M$  et  $C = MM^\top$ , donc elle est inversible. De plus, son inverse est égal à  $M^\top M$  qui est une matrice symétrique d'après la question 1.  $M$  est donc l'inverse d'une matrice symétrique, donc symétrique d'après la question 2. On peut alors remplacer  $M^\top$  par  $M$  dans l'équation (E) pour obtenir l'équation équivalente  $M^3 = I_n$ .
6. Par linéarité de la trace,  $\text{Tr}((M - I_n)^2) = \text{Tr}(M^2 - 2M + I_n) = \text{Tr}(M^2) - 2\text{Tr}(M) + \text{Tr}(I_n) = b - 2a + n$ . De même, en exploitant le fait que  $M^3 = I_n$  et donc  $M^4 = M$ , on calcule  $\text{Tr}((M^2 - I_n)^2) = \text{Tr}(M^2 - 2M^2 + I_n) = a - 2b + n$ , et  $\text{Tr}((M - M^2)^2) = \text{Tr}(M^2 - 2I_n + M) = a + b - 2n$ .
7. Si on additionne les trois traces calculées à la question précédente, on trouve  $b - 2a + n + a - 2b + n + a + b - 2n = 0$ . Or, chacune de ces traces est positive (question 3, les matrices manipulées sont toutes symétriques car  $M$  et  $I_n$  le sont). La seule possibilité est donc que chacune des trois traces soit nulle, ce qui implique, toujours d'après la question 3, que  $M - I_n = M^2 - I_n = M - M^2 = 0$ . Autrement dit, la seule solution de l'équation (E) est  $M = I_n$ .

### Exercice 19 (\*\*)

1. Calculons donc :  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$  et  $A^3 = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 3 \\ 2 & 15 & -12 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ .

2. Si on impose l'égalité souhaitée pour les coefficients de la deuxième ligne (celle où on a le plus souvent des 0 qui apparaissent, ça simplifiera la résolution), on obtient le système d'équations
 
$$\begin{cases} 2b & = & 2 \\ 7a + 3b + c & = & 15 \\ -6a & = & -12 \end{cases}$$
 . Le système se résout de lui-même :  $b = 1$ ,  $a = 2$ , donc  $c = 15 - 14 - 3 = -2$ . La seule relation possible est donc  $A^3 = 2A^2 + A - 2I_3$ , on vérifie bien sûr qu'elle reste valable pour tous les autres coefficients, ce qui est bien le cas.

3. On peut écrire  $-A^3 + 2A^2 + A = 2I_3$ , donc  $A \times \left( -\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I_3 \right) = I_3$ , ce qui prouve que

$A$  est inversible et que  $A^{-1} = -\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ . Si on est courageux,

on vérifie que  $A^{-1} \times A = I_3$ , ce qui est bien le cas.

4. On cherche donc les racines de  $Q = X^3 - 2X^2 - X + 2$ . On a déjà une première racine évidente qui est  $X_1 = 1$  (puisque  $Q(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$ ), et même une deuxième avec  $X_2 = -1$  (en effet,  $Q(-1) = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$ ). Le produit des trois racines du polynôme étant égal à  $-2$ , la dernière racine est donc  $X_3 = 2$ .

5. Comme d'habitude, je vais utiliser une résolution de système : 
$$\begin{cases} 2x - y - z = a \\ -x + y + 2z = b \\ -x + y + z = c \end{cases}$$

On s'empresse d'additionner les lignes extrêmes pour obtenir  $x = a + c$ , et de soustraire les deux dernières lignes pour avoir  $z = b - c$ . Il ne reste alors plus qu'à reprendre par exemple la dernière équation pour en déduire  $y = c + x - z = a - b + 3c$ . La matrice  $P$  est donc inversible

et  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

6. On calcule donc  $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ , puis  $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , qui est comme prévu une matrice diagonale. On remarque que ses coefficients diagonaux sont exactement les racines du polynôme  $Q$ , ce n'est sûrement pas un hasard.

7. On a bien sûr  $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ . La propriété demandée se démontre par une récurrence hyper classique :  $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$ , ce qui prouve la propriété pour  $n = 0$ . Si on la suppose vérifiée au rang  $n$ , alors  $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}A$ , or  $P^{-1}A = DP^{-1}$  d'après la définition de  $D$ , donc  $A^{n+1} = PD^nDP^{-1} + PD^{n+1}P^{-1}$ , ce qui prouve l'hérédité.

8. (a) Il suffit d'écrire le calcul :  $X_{n+1} = A \times X_n$ .

- (b) On va démontrer par récurrence que  $X_n = A^n X_0$ . C'est trivial au rang 0 :  $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$ , et l'hérédité est triviale aussi : si  $X_n = A^n X_0$  alors  $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$ .

- (c) Bon, finalement, il va falloir calculer  $A^n$  pour s'en sortir (ou au moins ses deux premières lignes puisque le produit par  $X_0$  ne fera intervenir que les coefficients des deux premières

lignes).  $PD^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n & -1 & -2^n \\ (-1)^{n+1} & 1 & 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} & 1 & 2^n \end{pmatrix}$ , puis

$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n - 3 + 2(-1)^n \\ 1 + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} - 1 & 3 - 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \\ 1 + (-1)^{n+1} & 2^n - 1 & 3 - 2^n + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$ . On multiplie sim-

plement cette matrice par  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , pour obtenir  $X_n$ , et donc  $u_n = 2(-1)^n - 2^n$ ,  $v_n = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$  et  $w_n = 2^n + (-1)^{n+1}$ .

## Problème

### I. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- Calculons donc  $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} + \frac{1}{3} & \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{4} & \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$ . En étudiant attentivement les coefficients non diagonaux, on se convainc que  $a = \frac{5}{6}$  (mais oui,  $\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$ ). Ensuite,  $A^2 - \frac{5}{6}A = \frac{1}{6}I$ . On trouve donc  $A^2 = \frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I$ .
- C'est évidemment une récurrence classique : c'est vrai au rang 2 d'après la question précédente mais aussi au rang 1 en posant  $a_1 = 1$  et  $b_1 = 0$  ; et même au rang 0 puisque  $A^0 = I = 0 \times A + 1 \times I$ . Supposons donc  $A^n = a_n A + b_n I$ , alors  $A^{n+1} = A^n \times A = (a_n A + b_n I) \times A = a_n A^2 + b_n A = a_n \left( \frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I \right) + b_n A = \left( \frac{5}{6}a_n + b_n \right) A + \frac{1}{6}a_n I$ . La relation est vérifiée au rang  $n + 1$ , elle est donc vraie pour tout entier  $n$ .
- Les relations de récurrence découlent de la question précédente :  $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + b_n$ , et  $b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n$ . On en déduit que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+2} = \frac{5}{6}a_{n+1} + b_n = \frac{5}{6}a_{n+1} + \frac{1}{6}a_n$ . La suite  $(a_n)$  est donc récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique  $x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}$  a pour racine évidente 1, et pour deuxième racine  $-\frac{1}{6}$  puisque le produit des racines vaut  $-\frac{1}{6}$ . On en déduit que  $a_n$  peut se mettre sous la forme  $a_n = \alpha + \beta \left( -\frac{1}{6} \right)^n$ . À l'aide des valeurs initiales, on va déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  : pour  $n = 0$ ,  $a_0 = \alpha + \beta = 0$  ; et  $a_1 = \alpha - \frac{\beta}{6} = 1$ . Autrement dit  $\alpha + \frac{\alpha}{6} = 1$ , donc  $\alpha = \frac{6}{7}$ , puis  $\beta = -\frac{6}{7}$ . On obtient donc  $a_n = \frac{6}{7} \left( 1 - \left( -\frac{1}{6} \right)^n \right)$ , puis  $b_n = \frac{1}{6}a_{n-1} = \frac{1}{7} \left( 1 - \left( -\frac{1}{6} \right)^{n-1} \right)$  (la formule fonctionne également quand  $n = 0$  puisqu'elle donne bien  $b_0 = 1$ ).
- On sait que  $A^n = a_n A + b_n I$ , ce qui permet d'écrire, si on y tient vraiment,  $A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \left( -\frac{1}{6} \right)^n & \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \left( -\frac{1}{6} \right)^n \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \left( -\frac{1}{6} \right)^n & \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \left( -\frac{1}{6} \right)^n \end{pmatrix}$ .
- Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{6} \right)^n$ , tous les coefficients de la matrice précédente ont une limite finie, la suite de matrices  $(A^n)$  converge donc vers  $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ , qui est bien une matrice stochastique puisque  $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$ .

### II. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- On calcule bêtement  $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , puis  $J^3 = J^2$ , et on en déduit que,  $\forall n \geq 2$ ,  $J^n = J^2$ .
- On remarque aisément que  $B = \frac{1}{2}(I + J)$ . Les matrices  $I$  et  $J$  commutent bien entendu, on peut écrire, lorsque  $n \geq 2$ , que  $B^n = \frac{1}{2^n}(J + I)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k I^{n-k}$ . Il faut isoler les termes correspondant à  $k = 0$  et  $k = 1$  pour pouvoir écrire  $J^k = J^2$  dans tout le reste de la somme, on trouve alors  $B^n = \frac{1}{2^n} \left( I + nJ + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} J^2 \right)$ . Comme on sait que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ,

on peut simplifier :  $B^n = \frac{1}{2^n}(I + nJ + (2^n - n - 1)J^2) = \frac{1}{2}I + \frac{n}{2^n}J + \left(1 - \frac{n+1}{2^n}\right)J^2$ . Si

on tient à écrire la matrice explicitement,  $B^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^n} & 1 - \frac{n+1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Là encore, aucune difficulté pour trouver la limite de chacun des coefficients, on trouve  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B^n = J^2$ , qui est bien une matrice stochastique.

### III. Étude générale des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- Si  $a = b = 1$ , la matrice  $A$  n'est autre que l'identité, toutes ses puissances sont donc égales à  $I$ . Si  $a = b = 0$ , par contre,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on calcule  $A^2 = I$ , puis  $A^3 = A$ , et la suite des puissances de  $A$  est 2-périodique : si  $n$  est pair,  $A^n = I$ , si  $n$  est impair,  $A^n = A$ . C'est le seul cas où la suite ne converge pas.
- Calculons donc :  $A - I = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-b & b-1 \end{pmatrix}$ , et  $A - (a+b-1)I = \begin{pmatrix} 1-b & 1-a \\ 1-b & 1-a \end{pmatrix}$ . Le produit de ces deux matrices donne  $P(A) = 0$  (on a pour chaque coefficient une somme de deux termes opposés).
- La polynôme  $P$  étant de degré 2, on peut écrire la division sous la forme  $X^n = PQ + a_nX + b_n$ . On regarde ce que donne cette égalité pour les deux racines du polynôme  $P$ , à savoir 1 et  $a+b-1$  :  $1 = a_n + b_n$  et  $(a+b-1)^n = a_n(a+b-1) + b_n$ . En soustrayant les deux équations, on trouve  $a_n(a+b-2) = (a+b-1)^n - 1$ , soit  $a_n = \frac{(a+b-1)^n - 1}{a+b-2}$ . On en déduit  $b_n = 1 - a_n = \frac{a+b-1 - (a+b-1)^n}{a+b-2}$ . En conclusion, le reste recherché vaut  $\frac{(a+b-1)^n - 1}{a+b-2}X + \frac{a+b-1 + (a+b-1)^n}{a+b-2}$ .
- Puisque  $P(A) = 0$ , on peut déduire des calculs précédents que  $A^n = \frac{(a+b-1)^n - 1}{a+b-2}A + \frac{a+b-1 + (a+b-1)^n}{a+b-2}I$ .
- On peut écrire les quatre coefficients de la matrice  $A^n$ , ou plus simplement passer directement à la limite dans l'égalité précédente. Puisque  $a \leq 1$ ,  $b \leq 1$ , et qu'on a éliminé le cas  $a = b = 1$ , on aura toujours  $a+b-1 < 1$  (et  $a+b-1 > -1$  puisque les deux nombres sont positifs et ne sont pas tous les deux nuls), donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a+b-1)^n = 0$ . La suite  $(A^n)$  a donc pour limite  $\frac{a+b-1}{a+b-2}I - \frac{1}{a+b-2}A$ , ou encore  $\frac{1}{a+b-2} \begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}$ . Cette matrice est bien stochastique puisque la somme des coefficients de chaque ligne vaut  $\frac{a+b-2}{a+b-2} = 1$  (et que tous les coefficients de la matrice sont bien positifs, le coefficient  $\frac{1}{a+b-2}$  étant négatif).

### IV. Une étude plus générale.

- Il suffit de constater que si la matrice  $A$  est stochastique, toutes ses puissances seront stochastiques. En effet, le produit de deux matrices stochastiques est stochastique :  $\sum_{j=1}^n (AB)_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left( \sum_{j=1}^n b_{kj} \right)$ . Par hypothèse, si  $B$  est stochastique, quelle que soit la valeur de  $k$ ,  $\sum_{j=1}^n b_{kj} = 1$ , donc il ne reste que  $\sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$  puisque  $A$  est

stochastique. Le fait que  $A^n$  est toujours stochastique est alors une récurrence immédiate : c'est vrai pour  $A$  par hypothèse, et si c'est pour  $A^n$ , le produit  $A^n \times A$  est un produit de deux matrices stochastiques est stochastique. Autrement dit, la somme des coefficients de la ligne numéro  $i$  sur  $A^n$  est toujours égale à 1. Si on suppose que chacun de ces coefficients a une limite finie  $b_{ij}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , par somme de limite, on aura certainement

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} = 1, \text{ et la matrice } B \text{ sera donc stochastique.}$$

Pour prouver que  $B^2 = B$ , on peut constater la chose suivante : si  $(A^n)$  a pour limite  $B$ , alors  $(A^{2n}) = ((A^n)^2)$  aura pour limite  $B^2$ . C'est une simple conséquence du fait que les coefficients du carré d'une matrice sont obtenus à partir de ceux de la matrice à l'aide de sommes et de produits et que ces opérations sont conservées par passage à la limite (faites une démonstration formelle si vous le souhaitez). Or, la suite  $(A^{2n})$  est une sous-suite de la suite  $(A^n)$  qui converge vers  $B$ , donc elle converge aussi vers  $B$  (si vous n'êtes pas convaincu par le fait qu'on puisse affirmer cela sur une suite de matrices, songez qu'on est simplement en train de faire cette affirmation sur chacune des  $n^2$  suites de réels constitués de chacun des coefficients de la matrice  $A^n$ ). Conclusion  $B^2 = B$  puisque les deux matrices sont limites d'une même suite.

Pour montrer que  $AB = BA$ , plein de possibilités, une notamment utilise le même genre d'astuce que pour  $B^2 = B$ . La sous-suite  $(A^{n+1})$  converge certainement vers  $B$ . Or,  $A^{n+1} = A \times A^n$  converge aussi vers  $AB$ , donc  $B = AB$ . De même,  $A^{n+1} = A^n \times A$ , donc  $BA = AB = B$  (c'est même plus fort que ce qui était demandé).

2. Ce n'est pas si compliqué que ça en a l'air. Quand on effectue le produit  $A \times A^p$ ,  $(A^{p+1})_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(A^p)_{kj} \geq \sum_{k=1}^n a_{ik}\alpha_j^{(p)}$  puisque tous les coefficients  $(A^p)_{kj}$  sont plus grands que  $\alpha_j^{(p)}$  par définition de  $\alpha_j^{(p)}$ . Or,  $\sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$  puisque la matrice  $A$  est stochastique, donc  $(A^{p+1})_{ij} \geq \alpha_j^{(p)}$ .

Autrement dit, tous les coefficients de la ligne  $j$  dans  $A^{p+1}$  sont plus grands que  $\alpha_j^{(p)}$ . A fortiori le plus petit d'entre eux, d'où  $\alpha_j^{(p+1)} \geq \alpha_j^{(p)}$ . On démontre de la même façon que  $\beta_j^{(p+1)} \leq \beta_j^{(p)}$  en majorant cette fois-ci tous les coefficients de la colonne par  $\beta_j^{(p)}$ .

La dernière inégalité demande un peu plus de soin : en reprenant le calcul précédent, on peut isoler dans la somme le terme correspondant à  $\beta_j^{(p)}$ , notons son indice de ligne  $l$ , pour écrire  $(A^{p+1})_{ij} \geq \sum_{k \neq l} a_{ik}\alpha_j^{(p)} + a_{il}\beta_j^{(p)} \geq (1 - a_{il})\alpha_j^{(p)} + m\beta_j^{(p)}$  (puisque  $m$  est le plus petit de tous

les éléments de la matrice  $A$ . Tout cela est supérieur à  $\alpha_j^{(p)} - m\alpha_j^{(p)} + m\beta_j^{(p)} = \alpha_j^{(p)} + m\delta_j^{(p)}$ , donc  $\alpha_j^{(p+1)} \geq \alpha_j^{(p)} + m\delta_j^{(p)}$ . Un calcul exactement symétrique donne  $\beta_j^{(p+1)} \leq \beta_j^{(p)} - m\delta_j^{(p)}$ . Il ne reste plus qu'à soustraire les deux inégalités pour obtenir celle demandée.

3. Par une récurrence immédiate, on aura alors  $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_j^{(n)} \leq (1 - 2m)^n \delta_j^{(0)} = (1 - 2m)^n$  (dans la matrice identité, la différence entre le plus grand et le plus petit coefficient d'une colonne vaut toujours 1. Comme  $m > 0$  (la matrice ne contient que des termes strictement positifs par hypothèse), et comme  $\delta_j^{(n)}$  est toujours positif par définition, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_j^{(n)} = 0$ . On en déduit aisément que les suites  $(\alpha_j^{(n)})$  et  $(\beta_j^{(n)})$  sont adjacentes : en effet, on a prouvé plus haut que l'une était croissante et l'autre décroissante, et on vient d'expliquer que leur limite tendait vers 0. Les deux suites sont donc convergentes vers une même limite  $l_j$  (qui dépend quand même de  $j$ ). Mais si le plus grand et le plus petit coefficient de la colonne convergent vers une même limite, par théorème des gendarmes, tous les termes de la colonne, qui sont compris entre les deux, convergent également vers  $l_j$ . Ainsi, tous les coefficients de la suite de matrices  $(A^n)$  ont une limite, et la suite converge. Par

ailleurs, on a prouvé que les limites étaient identiques pour tous les coefficients d'une même colonne, donc toutes les lignes de la matrice  $B$  sont identiques.

4. On sait que la suite  $(A^n)$  converge vers une matrice  $B$  dont toutes les lignes sont identiques. Mais il est évident dans ce cas que la suite  $({}^t A^n)$  converge vers  ${}^t B$  (on se contente de mettre les coefficients à un endroit différent dans la matrice, ça ne va sûrement pas changer les limites!). Comme les deux suites sont en fait identiques puisque  $A = {}^t A$ , on en déduit que  $B = {}^t B$ . La matrice  $B$  est donc une matrice symétrique dont toutes les lignes sont identiques, tous ses coefficients sont nécessairement égaux (puisque ses colonnes sont alors elles aussi identiques). Comme la somme des coefficients sur une lignes doit donner 1, chaque coefficient doit donc

être égal à  $\frac{1}{3}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$