Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 22 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

13 mai 2024

Exercice 1 (*)

Dans chacun des cas, il suffit de calculer les images des vecteurs de la base canonique et d'écrire leurs coordonnées en colonne dans la matrice A.

1. Calculs immédiats : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On calcule $f(1) = 2X+1$, $f(X) = (2X+1)X - X^2 = X^2 + X$, et $f(X^2) = (2X+1)X^2 - 2X^3 = X^2$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $f(1) = \displaystyle\int_X^{X+2} 1\ dt = X+2-X = 2$, $f(X) = \displaystyle\int_X^{X+2} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_X^{X+2} = \frac{1}{2}(X^2+4X+4-X^2) = 2X+2$, et $f(X^2) = \displaystyle\int_X^{X+2} t^2\ dt = \frac{1}{3}[t^3]_X^{X+2} = \frac{1}{3}(X^3+6X^2+12X+8-X^3) = 2X^2+4X+\frac{8}{3}$. Autrement dit, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Finalement, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (*)

Pour prouver que s est une symétrie, il suffit de vérifier que $M^2 = I$ (ce qui prouvera que $s \circ s = id$), ce qui est effectivement le cas (difficile de détailler plus le calcul ici). Pour déterminer l'espace par rapport auquel on symétrise, il faut déterminer $\ker(f - id)$, ce qui revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. Pas trop difficile à résoudre, on garde l'unique équation $x+2y+z=0$, soit $z = -x-2y$. Autrement dit, on symétrise par rapport à l'espace $\mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-2))$. Quand à l'espace parallèlement auquel on symétrise, on cherche cette fois-ci le noyau de $f + id$, donc on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & & & = & 0 \\ -x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$. La condition $y = 0$ ramène les deux autres équations à $x = z$, donc l'espace recherché est $\mathrm{Vect}((1,0,1))$.

Exercice 3 (**)

Ce n'est pas si méchant que ça : la division de 1 par $X^2 - X + 1$ s'écrit simplement $1 = 0 \times (X^2 - X + 1) + 1$, le reste vaut donc 1, soit $f(1) = 1$. De même, $f(X) = X$. Il faut réfléchir un tout petit peu plus ensuite : $X^2 = 1 \times (X^2 - X + 1) + X - 1$, donc $f(X^2) = X - 1$, et enfin, avec un poil d'astuce, $X^3 = X \times (X^2 - X + 1) + X^2 - X = (X+1) \times (X^2 - X + 1) - X + X - 1$, donc $f(X^3) = -1$. On peut aussi, bien entendu, effectuer vraiment la division euclidienne. La matrice dans la base canonique de f est donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul inimaginablement palpitant permet de constater que $A^2 = A$ (mais si !), l'application f est donc un projecteur (ce qui n'a rien de surprenant, le reste de notre division étant de degré au maximum 1, si on refait une division par $X^2 - X + 1$, il ne se passera plus rien). Si on souhaite déterminer le noyau en résolvant le système, en notant $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, on a simplement les deux équations $a - c - d = b + c = 0$ (les deux autres lignes étant nulles), soit $c = -b$, et $d = a + b$. Autrement dit, $\ker(f) = \text{Vect}(1 + X^3, X - X^2 + X^3)$. En fait, on sait très bien que ce noyau est constitué des multiples de $X^2 - X + 1$, on peut vérifier que cela correspond bien à ce qu'on vient d'obtenir. Pour l'image, en prenant les vecteurs-colonnes de la matrice représentative, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, X, X - 1, -1) = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 4 (**)

On peut bien sûr essayer d'exprimer les trois vecteurs de la base $\mathcal{C}$ en fonction de ceux de la base $\mathcal{B}$ (trois systèmes de trois équations à trois inconnues à résoudre), mais on peut aller un tout petit peu plus vite en exploitant intelligemment les matrices de passage : en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, et $Q = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ celle de la base canonique vers $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1}Q$ (en effet, en notant X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur u dans la base canonique, et X_1, X_2 ses coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on sait que $X = PX_1$ et $X = QX_2$, dont on déduit $X_1 = P^{-1}X = P^{-1}QX_2$, et donc $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1}Q$). Commençons donc par calculer l'inverse de P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -8 & 3 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $P^{-1}Q = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (**)

1. La linéarité de l'application est évidente, et nous allons tout simplement démontrer que c'est un endomorphisme en calculant les images des vecteurs de la base canonique (ce qui est nécessaire pour déterminer la matrice) et en constatant qu'elles sont dans $\mathbb{R}_2[X]$. En effet, $\varphi(1) = 1 - 2X$, $\varphi(X) = X^2 + X + 1 - 2X^2 + X = -X^2 + 2X + 1$, et $\varphi(X^2) = 2X^3 + 2X^2 + 2X - 2X^3 + X^2 = 3X^2 + 2X$. La matrice de l'application est donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. On peut par exemple prouver que f est injective (ce sera suffisant puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie) en déterminant son noyau. D'après les calculs de la question précédente, $f(aX^2 + bX + c) = 3aX^2 + 2aX - bX^2 + 2bX + b + c - 2cX$. Cette image s'annule si $3a - b = 2a + 2b - 2c = b + c = 0$. On en déduit les conditions $a = \frac{1}{3}b$ et $c = -b$, en remplaçant dans la deuxième équation on obtient alors $\frac{2}{3}b + 2b + 2b + 0$, donc $b = a = c = 0$. Le noyau est donc réduit au polynôme nul, et f est injective, donc bijective. Pour déterminer un antécédent de $X^2 - 1$, qui a pour coordonnées $(-1, 0, 1)$ dans la base canonique, on exploite A et on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & & & = & -1 \\ -2a & + & 2b & + & 2c & = & 0 \\ & - & b & + & 3c & = & 1 \end{array}\right.$. La deuxième équation donne $a = b + c$, la première $a = -1 - b = -3c$ et la dernière $b = 3c - 1$. En remplaçant, on a donc $-3c = 4c - 1$, soit $c = \frac{1}{7}$, puis $a = -\frac{3}{7}$ et $b = -\frac{4}{7}$. Bon, c'est moche, mais $P = \frac{1}{7}(X^2 - 4X - 3)$ est un antécédent (et même le seul) de $X^2 - 1$ par φ.

3. D'après la question précédente, on connait déjà une solution de l'équation ! Il ne reste plus qu'à déterminer la solution générale de l'équation homogène associée $y' - \dfrac{2x-1}{x^2+x+1}y = 0$. Pour cela, il faut réussir à calculer (par exemple) $\displaystyle\int^x \frac{2t-1}{t^2+t+1}\,dt = \int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{2}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt = \ln(x^2+x+1) - \frac{8}{3}\int_0 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2+1}\,dt = \ln(x^2+x+1) - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$.
Il ne reste plus qu'à ajouter à cette superbe fonction la solution particulière obtenue plus haut pour trouver toutes les solutions de l'équation différentielles, qui sont donc les fonctions $y : x \mapsto K\ln(x^2+x+1) + \dfrac{4K}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right) + \dfrac{1}{7}(x^2-4x-3)$, avec $K \in \mathbb{R}$. On est bien contents de le savoir.

Exercice 6 (***)

1. Il suffit de constater que $u \circ (u + id) = -id$ pour comprendre que u est bijectif, de réciproque $u^{-1} = -u - id$.
2. Il suffit de prouver que $u(x)$ ne peut pas être proportionnel à x. Supposons donc $u(x) = \lambda x$ (avec $\lambda \neq 0$ puisque le noyau de u est réduit au vecteur nul). Alors $u^2(x) = \lambda^2 x$, donc $\lambda^2 x + \lambda x + x = 0$ en reprenant l'hypothèse faite sur u. On doit donc avoir $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, ce qui est difficile dans la mesure où cette équation a un discriminant négatif, et donc pas de racine réelle.
3. Prenons donc un x quelconque (non nul quand même) de $\mathbb{R}^4$, $(x, u(x))$ forme une famille libre d'après la question précédente. Choisissons désormais un $y \neq 0$ tel que $u(y) \notin \text{Vect}(x, u(x))$. C'est certainement possible puisque l'image de u est $\mathbb{R}^4$ tout entier (l'application est bijective). Un tel y ne peut lui-même pas appartenir à $\text{Vect}(x, u(x))$, puisque toute combinaison linéaire de x et de $u(x)$ a une image par u qui est elle-même dans $\text{Vect}(x, u(x))$ (rappelons que $u(u(x)) = -u(x) - x$). La famille $(x, u(x), y, u(y))$ est donc nécessairement une famille libre de $\mathbb{R}^4$, et par conséquent en forme une base. La matrice de u dans cette base est exactement celle demandée, puisque $u(u(x)) = -u(x) - x$ et $u(u(y)) = -u(y) - y$, toujours à cause de l'équation vérifiée par u.

Exercice 7 (**)

Chercher une telle base revient à chercher trois vecteurs (u, v, w) tels que $f(u) = 0$, $f(v) = -v$ et $f(w) = v - w$ (accessoirement, il serait bon que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque $f(x, y, z) = (-x+z, -x-2y+z, -x-y+z)$, on va pouvoir résoudre trois jolis systèmes. Le premier système (celui pour lequel $f(u) = 0$) se ramène tellement trivialement à l'unique équation $x = z$ que je ne l'écris même pas. Nous prendrons donc $u = (1, 0, 1)$. Pour le deuxième vecteur, $f(v) = -v$ se traduit par $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & z & = & -x \\ -x & - & 2y & + & z & = & -y \\ -x & - & y & + & z & = & -z \end{array}\right.$. Bon, une fois constaté que $z = 0$, il reste la seule condition $y = -x$, on peut donc prendre $v = (1, -1, 0)$. Reste désormais à trouver un vecteur w tel que $f(w) = v - w$, ce qui se traduit par $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & z & = & 1-x \\ -x & - & 2y & + & z & = & -1-y \\ -x & - & y & + & z & = & -z \end{array}\right.$. Cette fois, la première équation donne $z = 1$, donc $-x - y = -2$ (les deux dernières équations sont encore identiques). Pour ne pas s'embêter, $w = (1, 1, 1)$ fera l'affaire. Il est très facile de constater que (u, v, w) est bien une base de $\mathbb{R}^3$. De toute façon, on va devoir inverser la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de la base canonique vers (u, v, w) pour la suite des calculs, ce qui prouvera que la famille est une base.

Utilisons la méthode de la résolution de système pour cela : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ & - & y & + & z & = & b \\ x & & & + & z & = & c \end{array}\right.$. La différence des deux équations extrêmes donne $y = a-c$. La deuxième équation donne alors $z = b+y = a+b-c$, puis $x = c - z = 2c - a - b$. On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Reste à calculer des puissances : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons par exemple C et N ces deux matrices, la matrice N est clairement nilpotente et on vérifie aisément que $N^2 = 0$. On peut appliquer la formule du binôme de Newton (les deux matrices commutent : $CN = NC = -N$), on trouve alors $B^n = (C+N)^n = C^n + nC^{n-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. Comme on sait que $P^{-1}AP = B$, la récurrence classique permet de constater que $A^n = PB^nP^{-1}$: c'est vrai au rang 1 puisque $PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, et si on le suppose au rang n, alors $A^{n+1} = AA^n = PBP^{-1}PB^nP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}$. Pour achever ce brillant exercice, il ne reste plus qu'à calculer A^n : $PB^n = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n & (1-n)(-1)^n \\ 0 & (-1)^{n+1} & (n+1)(-1)^n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PB^nP^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 2-n & 1-n & n-2 \\ n & n+1 & -n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (**)

1. Il suffit de calculer le produit des deux matrices $M - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et constater qu'il est en effet nul. D'ailleurs, on peut se contenter de calculer la première ligne, les deuxième et troisième ligne de $M - I$ étant des multiples de la première, on obtiendra également des zéros sur celles-ci.
2. Les deux sous-espaces en question ont une intersection clairement réduite au vecteur nul, on peut difficilement vérifier à la fois $f(u) = u$ et $f(u) = -3u$ sans être nul. Comme on n'a pas encore d'information sur les dimensions, prouver directement que la somme des deux espaces est égale à $\mathbb{R}^3$ demande une certaine dose d'astuce. En gros, il faut écrire $u = v + w$, avec $f(v) = v$ et $f(w) = -3w$ (pour que v et w appartiennent aux deux noyaux). On sait, d'après la question précédente, que $M^2 + 2M - 3I = 0$, donc $f^2(u) + 2f(u) - 3u = 0$. On peut alors trouver relativement facilement v et w en les cherchant comme combinaisons linéaires de u et de $f(u)$. Ainsi, $f(u - f(u)) = f(u) - f^2(u) = f(u) + 2f(u) - 3u = -3(u - f(u))$, donc tous les multiples de $u - f(u)$ appartiennent à $\ker(f + 3\,id)$. De même, $f\left(u + \frac{1}{3}f(u)\right) = f(u) + \frac{1}{3}f^2(u) = f(u) - \frac{2}{3}f(u) + u = u + \frac{1}{3}f(u)$, donc tous les multiples de $u + \frac{1}{3}f(u)$ appartiennent à $\ker(f - id)$. Il ne reste plus qu'à reconstituer u à partir de ces deux morceaux : en posant $v = \frac{3}{4}u + \frac{1}{4}f(u)$ (qui appartient à $\ker(f - id)$) et $w = \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}f(u)$ (qui appartient à l'autre noyau), on obtient bien $u = v + w$, ce qui prouve la supplémentarité des deux noyaux.
3. On va procéder par résolution de systèmes. On a déjà calculé plus haut la matrice représentative de $f - id$, son noyau est donc constitué des solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Les trois équations sont équivalentes, on garde la simple équation $x = 2y+z$, soit $\ker(f-id) = \text{Vect}((2,1,0),(1,0,1))$. De même pour l'autre noyau, on résout $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & & & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & c \end{array}\right.$.
La deuxième équation donne $x = z$, et on a donc $4x - 2y = 0$ (les deux équations extrêmes sont identiques), soit $y = 2x$, donc $\ker(f + 3\,id) = \text{Vect}((1,2,1))$. On note en particulier que $\dim(\ker(f - id)) = 2$ et $\dim(\ker(f + 3\,id)) = 1$.

4. Il suffit de prendre la famille $((2,1,0),(1,0,1),(1,2,1))$ (qui est nécessairement une base puisque les deux noyaux sont supplémentaires). Chacun des trois vecteurs ayant une image proportionnelle à lui-même par f, la matrice de f dans cette base sera bien diagonale, plus précisément égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (***)

1. Considérons un vecteur $u \in E$ tel que $f^2(u) \neq 0$ (il en existe forcément d'après l'hypothèse faite sur l'application f). Notons $v = f(u)$ et $w = f^2(u)$. Bien sûr, $v \neq 0$ (sinon on aurait aussi $w = 0$), mais on peut également affirmer que v n'est pas proportionnel à u : si on avait $f(u) = \lambda u$, alors on en déduirait $f^2(u) = f(\lambda u) = \lambda^2 u$, puis $f^3(u) = \lambda^3 u$. Mais alors on aurait $\lambda = 0$ puisque $f^3 = 0$, ce qui est absurde puisque $v \neq 0$. La famille (u, v) est donc une famille libre. Vérifions maintenant que (u, v, w) reste encore libre. Si on suppose que w est combinaison linéaire de u et de v, on peut écrire $f^2(u) = \lambda f(u) + \mu u$, donc en composant par f, $\lambda f^2(u) + \mu f(u) = 0$, et en composant encore une fois $\mu f^2(u) = 0$, ce qui ne peut arriver que si $\mu = 0$. Mais alors $\lambda = 0$ en remontant nos équations, donc $f^2(u) = 0$, ce qui est contraire à nos hypothèses. Finalement, (u, v, w) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}$, donc une base qu'on va subtilement noter $\mathcal{B}$. La matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est exactement celle demandée dans l'énoncé (par construction, $f(u) = v$, $f(v) = w$ et $f(w) = f^3(u) = 0$).
2. Soit g un endomorphisme commutant avec f, et N sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. En notant M la matrice obtenue à la question précédente, on doit donc avoir $MN = NM$. Posons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on calcule alors facilement $MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, et $NM = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}$.
La condition $MN = NM$ se traduit donc par les égalités $b = c = f = 0$, $a = e$, $b = f$, $d = h$ et $e = i$. Autrement dit, les matrices commutant avec M sont de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}$.
L'ensemble correspondant est bien un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}$, qu'on peut même décrire comme $\text{Vect}(I_3, M, M^2)$. L'isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ envoie ce sev sur celui des endomorphismes commutant avec f, qui est donc également de dimension 3, et peut être décrit comme $\text{Vect}(id_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$.

Exercice 10 (**)

1. Puisqu'il s'agit d'une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, montrer la liberté de la famille suffit. Supposons donc que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, cela se traduit par le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & 2c & = & 0 \\ -a & & & - & c & = & 0 \\ -3a & + & 3b & + & c & = 0 & \end{array}\right.$. La deuxième équation donne immédiatement $c = -a$, ce qui donne en reportant dans les deux autres équations $b - a = 3b - 4a = 0$. Ces deux équations ne sont pas proportionnelles et impliquent donc $a = b = 0$, puis $c = 0$. La

famille est donc bien libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

2. Par définition, $s(e_1) = e_1$, $s(e_2) = -e_2$ et $s(e_3) = -e_3$, donc la matrice demandée est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Il n'y a rien à calculer : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. En notant $M = \mathrm{Mat}_{can}(s)$, on sait que $P^{-1}MP = D$, donc $M = PDP^{-1}$. Calculons donc P^{-1} en résolvant le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & a \\ -x & & & - & z & = & b \\ -3x & + & 3y & + & z & = & c \end{array} \right.$. La deuxième équation donne $z = -b - x$ qu'on peut reporter dans les deux autres : $-x + y = a + 2b$ et $-4x + 3y = b + c$. En multipliant par quatre la première de ces deux équations et en soustrayant la seconde, on a $y = 4a + 7b - c$, puis $x = y - a - 2b = 3a + 5b - c$ et enfin $z = -b - x = -3a - 6b + c$, donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à calculer $PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, puis $M = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -2 \\ -6 & -11 & 2 \\ -18 & -30 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (***)

1. On pose bien entendu $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ (quoique les plus tordus puissent changer l'ordre). Il suffit alors de prendre $A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ pour que l'égalité demandée soit vérifiée.

2. Il s'agit, pour changer, de résoudre des systèmes. Pour ne pas trainer de $\dfrac{1}{2}$ partout, on va tout multiplier par 2, l'équation $AX = X$ se traduit alors par le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 3y & + & 6z & = & 2x \\ 3x & + & 5y & - & 6z & = & 2y \\ 3x & + & 3y & - & 4z & = & 2z \end{array} \right.$. Les trois équations sont en fait rigoureusement identiques, il ne restent que la condition $x+y = 2z$, soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$. De même, pour l'équation $AX = -2X$, on résout $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \\ 3x & + & 9y & - & 6z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & & & = & 0 \end{array} \right.$. La dernière équation donne $y = -x$, et la première se résume alors (en divisant par 6) à $x + z = 0$, soit $z = -x$. La deuxième équation est alors toujours vérifiée, ce dont on déduit que $X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$.

3. C'est évident vu les formules obtenues, en écrivant en ligne pour simplifier, $S_1 = \mathrm{Vect}((2, 0, 1), (0, 2, 1))$, et $S_{-2} = \mathrm{Vect}((1, -1, -1))$.

4. Au vu des calculs précédents, il suffit de prendre pour P la matrice de passage $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. La récurrence habituelle nous permet de prouver que $A^n = PD^nP^{-1}$ (en notant D la matrice

diagonale de l'énoncé) : c'est vrai au rang 1 car $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, et en le supposant vrai au rang n, alors $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Il reste à calculer P^{-1}, par exemple par la méthode du système : $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & & & + & z & = & a \\ & & 2y & - & z & = & b \\ x & + & y & - & z & = & c \end{array}\right.$. Procédonc par substitution : $x = \dfrac{a-z}{2}$ et $y = \dfrac{b+z}{2}$, donc $\dfrac{a}{2} - \dfrac{z}{2} + \dfrac{b}{2} + \dfrac{z}{2} - z = c$, soit $z = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} - c$, puis $x = \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{2}$ et $y = \dfrac{a}{2} + \dfrac{3b}{4} - \dfrac{c}{2}$, soit $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Allez, un petit produit matriciel pour continuer : $PD^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & (-2)^n \\ 0 & 2 & -(-2)^n \\ 1 & 1 & -(-2)^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-(-2)^{n+1} & -2-(-2)^{n+1} & 4-(-2)^{n+2} \\ 2+(-2)^{n+1} & 6+(-2)^{n+1} & -4+(-2)^{n+2} \\ 2+(-2)^{n+1} & 2+(-2)^{n+1} & (-2)^{n+2} \end{pmatrix}$. Puisque $X_n = A^nX_0$, on en déduit (en simplifiant tout par 2), que $x_n = \dfrac{(1+(-2)^n)x_0 + (-1+(-2)^n)y_0 + (2+(-2)^{n+1})z_0}{2}$,
$y_n = \dfrac{(1-(-2)^n)x_0 + (3-(-2)^n)y_0 + (-2-(-2)^{n+1})z_0}{2}$,
et $z_n = \dfrac{(1-(-2)^n)x_0 + (1-(-2)^n)y_0 - (-2)^{n+1}z_0}{2}$.

Exercice 12 (*)

1. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on cherche à écrire $P = x(X^2+1) + y(X+1) + z(2X^2 - X)$, ce qui revient au système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & c \\ & & y & - & z & = & b \\ x & & & + & 2z & = & a \end{array}\right.$. En effectuant l'opération $L_3 + L_2 - L_1$, on trouve $z = a + b - c$, puis on en déduit aisément que $y = z + b = a + 2b - c$ puis $x = c - y = -a - 2b + 2c$. Puisque le système a toujours une solution, la famille est génératrice. Puisque la solution est unique (en particulier lorsque $a = b = c = 0$), la famille est libre. il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, la matrice de passage dans l'autre sens est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (attention quand même, les coefficients notés a, b et c dans la première question ne sont pas dans l'ordre de la base canonique).
3. Il suffit de calculer $P^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour en déduire que $P = 5(X^2+1) - 3(X+1) - 2(2X^2 - X)$.
4. Pour la base canonique, on calcule $\varphi(1) = 0$; $\varphi(X) = X$ et $\varphi(X^2) = 2X^2$ pour en déduire la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice sera donc $M' = P^{-1}MP = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 13 (**)

1. On calcule et on constate que $A^2 = A$. L'application f vérifie donc $f^2 = f$, c'est un projecteur.
2. Pour le noyau, on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ x & & & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. En prenant la deuxième équation, $x = 2z$, puis en reportant dans la troisième $2z - y - z = 0$, donc $y = z$. Reste à reprendre la première équation : $6z - 2z - 4z = 0$, qui est toujours vérifiée. Conclusion : $\ker(f) = \{(2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, 1, 1))$. Pour l'image, le plus simple est de chercher les vecteurs invariants par f, et donc de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & - & 4z & = & x \\ x & & & - & 2z & = & y \\ x & - & y & - & z & = & z \end{array}\right.$. Les équations se ramènent toutes à $x - y - 2z = 0$, donc $\text{Im}(f) = \{(y + 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (2, 0, 1))$.
3. La famille $((2, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (en effet, si $a(2, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(2, 0, 1) = 0$, en composant par f, on obtient $b(1, 1, 0) + c(2, 0, 1) = 0$, ce qui implique très rapidement $b = c = 0$, puis $a = 0$, la matrice de passage de la base canonique à notre famillee est inversible, la famille est donc une base). Dans cette base, le premier vecteur a une image nulle par f, les deux autres ont pour image eux-même, la matrice de f est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 (*)

1. les matrices A_1 et B_1 n'ont pas la même trace, elles ne peuvent pas être semblables.
2. les matrices A_2 et B_2 sont bien semblables. Si on note $f(x, y, z) = (y, 0, 0)$, A_2 est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et B_2 est la matrice de cette même application f dans la base $((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$ (vérifications triviales).
3. les matrices A_3 et B_3 ne sont pas semblables pour une raison un peu subtile : $A_3^2 = 0$, mais $B_3^2 \neq 0$ (en fait $B_3^2 = A_3$). Or, si on avait une relation du type $B_3 = P^{-1}A_3P$, on aurait également $B_3^2 = P^{-1}A_3^2P$, ce qui impliquerait $B_3^2 = 0$.
4. les matrices A_4 et B_4 sont bien semblables. Si on note $f(x, y, z) = (y, z, 0)$, A_4 est la matrice de f dans la base canonique, et B_4 est la matrice de la même application f dans la base $((1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1))$ (encore une fois les vérifications sont triviales).

Exercice 15 (***)

1. Il s'agit de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (3-\lambda)x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ -2x & + & (6-\lambda)y & + & 6z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & (2+\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$. Additions donc les deux dernières équations pour obtenir $(4-\lambda)y+(4-\lambda)z = 0$. Si $\lambda = 4$, cette équation disparait et il ne reste plus que les deux autres conditions $-x-2y-3z = -2x+2y+6z = 0$. On peut les additionner pour trouver $-3x + 3z = 0$, donc $z = x$, puis $y = x - 3z = -2x$, dont on déduit que $\ker(f - 4\,id) = \text{Vect}((1, -2, 1))$. Supposons désormais que $\lambda \neq 4$, on a alors $y + z = 0$, donc $z = -y$, qu'on peut reporter dans nos deux premières équations : $(3 - \lambda)x + y = 0$ et $-2x - \lambda y = 0$. Effectuons alors l'opération $L_2 + \lambda L_1$ pour trouver $(-2 + 3\lambda - \lambda^2)x = 0$. L'équation $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ admet pour racines évidentes $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. Si λ est différent de 1, 2 ou 4, on obtiendra $x = 0$, puis $y = z = 0$ et le noyau sera donc nul. Dans le cas où $\lambda = 1$, on conserve une des deux équations faisant intervenir x et y (équations qui sont équivalentes) : $2x + y = 0$, donc $y = -2x$. Avec la condition précédente

$z = -y$, on peut donc conclure $\ker(f - id) = \text{Vect}((1, -2, 2))$. On procède de même lorsque $\lambda = 2$: l'équation restante est $x + y = 0$, donc $y = -x$, puis $\ker(f - 2\,id) = \text{Vect}((1, -1, 1))$.

2. Ce sont exactement les valeurs pour lesquelles le noyau n'est pas nul, donc 1, 2 et 4.
3. Le calcul a déjà été effectué dans la première question.
4. Il suffit de prendre la base $((1, -2, 2), (1, -1, 1), (1, -2, 1))$, dans laquelle la matrice de f sera, d'après les calculs précédents, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Bien sûr, il faudrait tout de même vérifier que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. En fait, ce sera toujours le cas dans ce genre de situation. Notons donc u, v et w les trois vecteurs, qui vérifient $f(u) = u$, $f(v) = 2v$ et $f(w) = 4w$. Supposons maintenant que $au + bv + cw = 0$, alors $(f - id)(au + bv + cw) = 0$, soit $bv + 3cw = 0$. Appliquons maintenant $f - 2\,id$ à $bv + 3cw$ pour obtenir $6cw = 0$. On en déduit que $c = 0$ puis $b = 0$ et $a = 0$ en remontant, la famille est donc libre et constitue une base de $\mathbb{R}^3$. Les plus motivés d'entre vous prouveront plus généralement en utilisant cette technique qu'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_k)$ de $\mathbb{R}^n$ qui sont vecteurs propres d'une même application linéaire f pour des valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ deux à deux distinctes forment nécessairement une famille libre. Sinon, vous attendrez la démonstration de votre professeur de mathématiques préféré l'an prochain.

Exercice 16 (**)

1. Il suffit d'écrire les coefficients dans le bon ordre : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. En observant les coefficients hors de la diagonale, on constate qu'ils ont été multipliés par 3 par rapport à ceux de la matrice A. Comme $3A$ a pour coefficients diagonaux 6, 0 et 6, on en déduit facilement que $A^2 = 3A - 2I$. L'application f vérifie donc $f^2 = 3f - 2\,id$, soit $f \circ \left(\frac{1}{2}f - \frac{3}{2}\,id\right) = -\,id$. On en déduit que f est bijective et que sa réciproque f^{-1} vérifie $f^{-1} = \frac{3}{2}\,id - \frac{1}{2}f$.
3. On doit donc résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (2-\lambda)x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & \lambda y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & (2-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$. L'opération $L_3 - L_2$ donne $(\lambda - 1)y + (1 - \lambda)z = 0$. On a donc un premier cas particulier à traiter : si $\lambda = 1$, le système se réduit aux deux premières équations $x - y + z = 0$ et $x - y + z = 0$. Ah, en fait, il n'y a qu'une seule équation, et on en déduit directement que $\ker(f - id) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$. Revenons au cas général $\lambda \neq 1$, la dernière équation peut alors se simplifier en $z = y$, et on remplace dans les deux équations restantes : $(2 - \lambda)x = 0$ et $x + (1 - \lambda)y = 0$. Si $\lambda \neq 2$, on obtient très rapidement $x = 0$, puis $y = 0$ puisqu'on a déjà supposé $\lambda \neq 1$. Le seul autre cas à considérer est donc $\lambda = 2$, pour lequel il nous reste comme dernière équation (en plus de la condition $z = y$) $x - y = 0$, donc $x = y$. La conclusion est encore une fois très rapide : $\ker(f - 2\,id) = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Bien entendu, si $\lambda \notin \{1, 2\}$, on a simplement $\ker(f - \lambda\,id) = \{0\}$. En particulier, les seules valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda\,id$ n'est pas injective (et donc pas un automorphisme) sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.
4. Comment dire ? On vient de le faire. Précisons quand même que $\dim(\ker(f - id)) = 2$ et $\dim(\ker(f - 2\,id)) = 1$.

5. La somme de leurs dimensions étant égale à 3, donc la dimension de E, il suffit de vérifier que leur intersection est nulle. Pour cela, on constate simplement qu'un vecteur u vérifiant à la fois $f(u) = u$ et $f(u) = 2u$ est solution de l'équation $2u = u$, donc est bien le vecteur nul.
6. (a) C'est une sorte de système complètement trivial à résoudre. En soustrayant les deux conditions demandées, on doit avoir $p = f - id$, et on en déduit directement que $q = id - p = 2\,id - f$.

   (b) Pas besoin d'exprimer explicitement ces applications, on va faire un calcul formel exploitant la relation $f^2 = 3f - 2\,id$ démontrée plus haut. Calculons donc $p^2 = (f - id)^2 = f^2 - 2f + id = 3f - 2\,id - 2f + id = f - id = p$, ce qui prouve que p est bien un projecteur. De même, $q^2 = (2\,id - f)^2 = 4\,id - 4f + f^2 = 4\,id - 4f + 3f - 2\,id = 2\,id - f$, et q est aussi un projecteur. Enfin, on calcule $p \circ q = (f - id) \circ (2\,id - f) = 2f - f^2 - 2\,id + f = 3f - 2\,id - f^2 = 0$. Le calcul de $q \circ p$ est exactement le même et donne évidemment le même résultat.
7. On va effectuer une petite récurrence : pour $n = 0$, $2^0 p + q = p + q = id = f^0$, donc la relation est vérifiée. Si on la suppose vérifiée au rang n, alors $f^{n+1} = f^n \circ f = (2^n p + q) \circ (2p + q) = 2^{n+1} p^2 + 2^n p \circ q + 2q \circ p + q^2 = 2^{n+1} p^2 + q^2$ d'après les relations démontrées à la question précédente, donc la propriété est bien héréditaire, et vraie pour tout entier naturel. Pour $n = 1$, on devrait donc avoir $f^{-1} = \frac{1}{2} p + q = \frac{1}{2} f - \frac{1}{2}\,id + 2\,id - f = \frac{3}{2}\,id - \frac{1}{2} f$. C'est bien le cas !

Exercice 17 (***)

1. La seule chose à vérifier est la linéarité de f, ce qui est très pénible à écrire : soient $u(x, y, z)$ et $v(x', y', z')$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda u + v) = f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = (2\lambda x + 2x' - \lambda y - y' - \lambda z - z', 7\lambda x + 7x' - 2\lambda y - 2y' - 5\lambda z - 5z', -\lambda x - x' - \lambda y - y' + 2\lambda z + 2z') = \lambda(2x - y - z, 7x - 2y - 5z, -x - y + 2z) + (2x' - y' - z', 7x' - 2y' - 5z', -x' - y' + 2z') = \lambda f(u) + f(v)$. L'application f est donc bien linéaire, c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
2. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Commençons par déterminer le noyau en résolvant l'équation $f(u) = 0$, c'est-à-dire le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ 7x & - & 2y & - & 5z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$. On effectue les opérations $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - L_1$ pour se ramener à $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ 3x & & & - & 3z & = & 0 \\ -3x & & & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux dernières équations sont manifestement équivalentes, on en déduit que $z = x$, puis en reportant dans la première équation que $y = x$. Autrement dit, $\ker(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$. En particulier, ce noyau est de dimension 1, donc l'image de f sera de dimension 2 (théorème du rang). Comme $f(1, 0, 0) = (2, 7, -1)$ et $f(0, 1, 0) = (-1, -2, -1)$ sont deux vecteurs non proportionnels engendrant un sous-espce vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, on aura $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((2, 7, -1), (1, 2, 1))$ (on a changé les signes du deuxième vecteur, ce qui n'a aucune influence). Bien sûr, puisque l'application f n'est pas injective (noyau pas réduit au vecteur nul), M n'est pas une matrice inversible.
4. Soit $u(x, y, z) \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors $x = y = z$ et $u = \lambda(2, 7, -1) + \mu(1, 2, 1) = (2\lambda + \mu, 7\lambda + 2\mu, \mu - \lambda)$. Puisque ces trois coordonnées doivent être égales, on doit donc avoir $2\lambda + \mu = 7\lambda + 2\mu = \mu - \lambda$, donc $5\lambda + \mu = 0$ et $3\lambda = 0$. Ce n'est évidemment possible que si $\lambda = \mu = 0$, donc $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Comme de plus $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$, les deux sous-espaces sont bien supplémentaires.

5. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on souhaite décomposer u sous la forme $u=a(1,1,1)+b(2,7,-1)+c(1,2,1)$ (dans cette décomposition, on notera $u_F=a(1,1,1)$ le vecteur appartenant à $\ker(f)$ et $u_G=b(2,7,-1)+c(1,2,1)$ celui appartenant à $\mathrm{Im}(f)$). On doit pour cela résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & 2b & + & c & = & x \\ a & + & 7b & + & 2c & = & y \\ a & - & b & + & c & = & z \end{array}\right.$. En soustrayant la première ligne aux deux autres, on obtient $5b+c=y-x$ et $-3b=z-x$. On en déduit directement que $b=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}z$, puis $c=y-x-5b=-\frac{8}{3}x+y+\frac{5}{3}z$, et enfin $a=z+b-c=3x-y-z$. Autrement dit, $u_F=(a,a,a)=(3x-y-z,3x-y-z,3x-y-z)$, et $u_G=(2b+c,7b+2c,-b+c)=(-2x+y+z,-3x+2y+z,-3x+y+2z)$. La symétrie par rapport à $\ker(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$ est alors définie par $s(u)=u_F-u_G$, donc $s(x,y,z)=(5x-2y-2z,6x-3y-2z,6x-2y-3z)$.
6. Pour le premier noyau, on doit résoudre l'équation $f(u)=-u$, donc le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & - & z & = & 0 \\ 7x & - & y & - & 5z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$ (on a tout fait passer à gauche). On effectue les opérations $L_2\to L_2-L_1$ et $L_3\to L_3-L_1$ pour se ramener à $\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & - & z & = & 0 \\ 4x & & & - & 4z & = & 0 \\ -4x & & & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux dernières équations sont équivalentes, on obtient $z=x$ puis $y=2x$ donc $\ker(f+id)=\mathrm{Vect}((1,2,1))$. De même pour le second noyau, on doit résoudre $f(u)=3u$, soit $\left\{\begin{array}{ccccccc} -x & - & y & - & z & = & 0 \\ 7x & - & 5y & - & 5z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. Cette fois-ci on a immédiatement une équation qui disparait. En effectuant L_2-5L_1, on a $12x=0$ donc $x=0$, on en déduit $z=-y$ et $\ker(f-3\,id)=\mathrm{Vect}((0,1,-1))$. Les vecteurs obtenus sont des vecteurs propres associés à l'application f, respectivement associés à la valeur propre -1 (pour $\ker(f+id)$), et à la valeur propre 3 (pour $\ker(f-3\,id)$).
7. On va bien sûr poser $\mathcal{B})=((1,1,1),(1,2,1),(0,1,-1))$. Vérifions quand même que $\mathcal{B}$ est une famille libre (puisqu'elle est constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il s'agira alors automatiquement d'une base), puisqu'on ne dispose pas encore des théorèmes permettant de l'affirmer directement. Supposons que $\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,2,1)+\lambda_3(0,1,-1)=0$, alors $\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$. La soustraction des deux équations extrêmes donne tout de suite $\lambda_3=0$, il reste alors les conditions $\lambda_1+\lambda_2=\lambda_1+2\lambda_2=0$ qui impliquent $\lambda_1=\lambda_2=0$. La famille est donc libre, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$. Les trois vecteurs constituant cette base étant des vecteurs propres de f (même celui du noyau, associé à la valeur propre 0), on aura $Mat_{\mathcal{B}}(f)=D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
8. Il suffit d'écrire la matrice : $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour l'inverser, on va comme d'habitude procéder à une résolution de système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ x & + & y & - & z & = & c \end{array}\right.$. La soustraction des deux lignes extrêmes du système donne $z=a-c$, et celle des deux dernières lignes donne $y=b-c-2z=-2a+b+c$, et on a enfin $x=a-y=3a-b-c$. Finalement, P est inversible

(ça, on le savait déjà), et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Bien entendu, on aura $D = P^{-1}MP$.

9. On peut le vérifier matriciellement (de préférence avec la matrice D, ça ira plus vite), mais aussi simplement en constatant que c'est vrai pour les trois vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Par définition, le vecteur $(1,1,1)$ vérifie $f(u) = 0$ (c'est un vecteur du noyau !) donc $f^2(u) = f^3(u) = 0$, l'égalité est triviale pour lui. Mais, par définition également, le vecteur $(1,2,1)$ vérifie $f(u) = -u$, donc $f^2(u) = f(-u) = -f(u) = u$, puis $f^3(u) = f(u) = -u$, on en déduit que $f^3(u) - 2f^2(u) - 3f(u) = -u - 2u + 3u = 0$. Enfin, le dernier vecteur $(0,1,-1)$ vérifie $f(u) = 3u$, donc $f^2(u) = f(3u) = 3f(u) = 9u$ et $f^3(u) = 9f(u) = 27u$, d'où $f^3(u) - 2f^2(u) - 3f(u) = 27u - 18u - 9u = 0$. Puis l'application $f^2 - 2f^2 - 3f$ s'annule pour trois vecteurs formant une base de $\mathbb{R}^3$, il s'agit de l'application nulle, ce qui revient bien à dire que $f^3 = 2f^2 + 3f$. On peut ensuite faire une récurrence : pour $n = 1$, l'égalité est évidente en posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$. Elle l'est d'ailleurs tout autant pour $n = 2$ en posant $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ (ça nous servira pour la question suivante). Supposons désormais l'égalité vérifiée au rang n, alors $f^{n+1} = f^n \circ f = (a_n f^2 + b_n f) \circ f = a_n f^3 + b_n f^2$. En exploitant la relation démontrée au début de la question, $f^{n+1} = a_n(2f^2 + 3f) + b_n f^2 = (2a_n + b_n)f^2 + 3a_n f$. Il suffit donc de poser $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$ pour que la relation soit vraie au rang $n+1$, ce qui prouve l'hérédité et achève notre récurrence.

10. D'après les calculs de la question précédente, $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, donc $a_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_{n+1} + 3a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, et son équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$ admet pour racines évidentes -1 et 3 (ce qui a bien sûr un lien avec les deux noyaux calculés en question 5). Il existe donc deux réels A et B tels que $\forall n \geqslant 1$, $a_n = A \times 3^n + B(-1)^n$. Les valeurs initiales de la suite imposent les conditions $a_1 = 0 = 3A - B$, donc $B = 3A$, et $a_2 = 1 = 9A + B$, donc $12A = 1$ et $A = \dfrac{1}{12}$, dont on déduit $B = \dfrac{1}{4}$. Finalement, $a_n = \dfrac{3^n}{12} + \dfrac{(-1)^n}{4} = \dfrac{3^{n-1} + (-1)^n}{4}$. Pas besoin de refaire de calculs pour l'autre suite, $b_n = 3a_{n-1} = \dfrac{3^{n-1} + 3(-1)^{n-1}}{4}$. Conclusion : $f^n = \dfrac{3^{n-1} + (-1)^n}{4} f^2 + \dfrac{3^{n-1} + 3(-1)^{n-1}}{4} f$.

11. On calcule brutalement $p^2 = \dfrac{1}{144}(f^2 + f)^2 = \dfrac{1}{144}(f^4 + 2f^3 + f^2)$. On sait déjà que $f^3 = 2f^2 + 3f$, on en déduit que $f^4 = 2f^3 + 3f^2 = 7f^2 + 6f$ (ou on applique brutalement la formule explicite de la question précédente), donc $p^2 = \dfrac{1}{144}(7f^2 + 6f + 4f^2 + 6f + f^2) = \dfrac{1}{144}(12f^2 + 12f) = \dfrac{1}{12}(f^2 + f) = p$. Puisque $p^2 = p$, l'application p est bien un projecteur. De même, $q^2 = \dfrac{1}{16}(f^4 - 6f^3 + 9f^2) = \dfrac{1}{16}(7f^2 + 6f - 12f^2 - 18f + 9f^2) = \dfrac{1}{16}(4f^2 - 12f) = \dfrac{1}{4}(f^2 - 3f) = q$, donc q est également un projecteur.

12. C'est à nouveau un pur calcul formel : $f \circ p = \dfrac{1}{12}(f^3 + f^2) = \dfrac{1}{12}(2f^2 + 3f + f^2) = \dfrac{1}{4}(f^2 + f) = 3p$, et $f \circ q = \dfrac{1}{4}(f^3 - 3f^2) = \dfrac{1}{4}(-f^2 + 3f) = -q$.

13. On va bien sûr procéder par récurrence : pour $n = 1$, $3p - q = \dfrac{1}{4}(f^2 + f) - \dfrac{1}{4}(f^2 - 3f) = \dfrac{1}{4}f + \dfrac{3}{4}f = f$, ce qui prouve l'initialisation. Et si on suppose la formule vraie au rang n, les résultats de la question précédente permettent d'écrire que $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (3^n + (-1)^n q) = 3^n f \circ p + (-1)^n f \circ q = 3^{n+1} p + (-1)^{n+1} q$, ce qui prouve exactement la formule au rang $n+1$. En remplaçant p et q par leur définition, $f^n = \dfrac{3^n}{12}(f^2 + f) + \dfrac{(-1)^n}{4}(f^2 - 3f) = \dfrac{3^{n-1}}{4} f^2 + \dfrac{3^{n-1}}{4} f + \dfrac{(-1)^n}{4} f^2 + \dfrac{3(-1)^{n-1}}{4} f$. On retrouve exactement la même expression qu'à la question 9.

Problème 1 (**)

A. Calcul matriciel.

1. Un calcul trivial donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, soit effectivement $A^3 = 2A$.
2. Puisque A est la matrice représentative de f dans la base canonique, on a $f(x,y,z) = (y, x+z, y)$. On en déduit que $u(x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow y = z + x = 0$, soit $y = 0$ et $z = -x$. Autrement dit, $\ker(f) = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -1))$. L'unique vecteur $(1, 0, -1)$ constitue bien entendu une base de ce noyau puisqu'il est non nul.

   Effectuons un calcul similaire pour le second noyau, en résolvant le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} & & y & = & \sqrt{2}x \\ x & + & z & = & \sqrt{2}y \\ & & y & = & \sqrt{2}z \end{array}\right.$. Ce système se résout tout seul : $x = z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}y$, et l'équation du milieu est alors automatiquement vérifiée. Autrement dit, $\ker(f - \sqrt{2}\,id) = \{(x, \sqrt{2}x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1))$, et l'unique vecteur $(1, \sqrt{2}, 1)$ constitue encore une fois manifestement une base du noyau.
3. Pour ne pas avoir à faire plusieurs fois les mêmes calculs, on peut anticiper en regardant ce qui est demandé à la question suivante et noter immédiatement P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ (on ne sait pas encore qu'il s'agit d'une base) dans la base canonique, soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   La famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si cette matrice P est inversible, ce qu'on va vérifier en lui appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P est donc inversible, et $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

4. On l'a déjà fait à la question précédente : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On l'a déjà fait à la question précédent la question précédente : $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

6. Le but de la question est bien entendu d'utiliser la formule du cours $A' = P^{-1}AP$, où A est la matrice de f dans la base canonique (c'est la définition même de f qui nous le confirme). Il ne reste plus qu'à effectuer le produit matriciel : $AP = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, puis $A' = P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$, soit $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alternativement, les plus paresseux auront constaté que $f(u) = 0$ (ce qui découle du calcule du noyau de f), $f(v) = \sqrt{2}v$ (découle du calcul du deuxième noyau de la question 2), et $f(w) = -\sqrt{2}w$ (là il faut écrire le calcul), ce qui traduit exactement le fait que la matrice de f dans la base (u, v, w) est diagonale, avec comme coefficients 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sur la diagonale.

B. Étude d'une application linéaire.

1. Par définition (et d'après le calcul de A^2 effectué dans la première partie de l'exercice), $F = \{aI + bA + cA^2 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(I, A, A^2)$, ce qui suffit à prouver que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que (I, A, A^2) forme une famille génératrice de F. Or, la famille (I, A, A^2) est également libre : si on suppose que $aI + bA + cA^2 = 0$, avec a, b et c trois réels quelconques, la nullité des trois coefficients sur la première colonne impose $a + c = b = c = 0$, donc $a = b = c = 0$. La famille est donc libre, et il s'agit donc d'une base de F, qui est accessoirement un espace vectoriel de dimension 3.
2. Soit $\forall M \in F$, d'après la question précédente, $M = aI+bA+cA^2$, donc $AM = aA+bA^2+cA^3$. Or on a prouvé dans la première partie que $A^3 = 2A$, donc $AM = (a+2c)A+bA^2 \in F$ (puisque cette matrice est combinaison linéaire de deux matrices appartenant à F).
3. (a) On vient de prouver que $AM \in F$ pour toute matrice $M \in F$, ce qui prouve que l'application g est bien définie et à valeurs dans F. Reste à prouver qu'elle est linéaire : si M et N sont deux matrices de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $g(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda g(M) + g(N)$, ce qui prouve la linéarité de g, qui est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel F.

   (b) On a déja plus ou moins calculé plus haut $g(I) = A$, $g(A) = A^2$ et $g(A^2) = A^3 = 2A$, ce qui donne immédiatement pour matrice de g dans la base (I, A, A^2) la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Deux possibilités : soit on procède matriciellement, soit on effectue un calcul direct à partir de la définition de g. Si on choisit cette deuxième option, on calcule $g \circ g(M) = A^2M$, puis $g \circ g \circ g(M) = A^3M = 2AM = 2g(M)$, ce qui prouve bien que $g^3 = 2g$ (l'égalité est vraie quelle que soit la matrice M). Sinon, à l'aide de la matrice calculée à la question précédente, il suffit de vérifier que $B^3 = 2B$ (ce qui est facile) pour conclure.

(d) D'après la question précédente, on a $g \circ (g^2 - 2\,id) = g^3 - 2g = 0$, ce qui suffit à affirmer que $\mathrm{Im}(g^2 - 2\,id) \subset \ker(g^2)$. En effet (si on ne connait pas ce théorème), si $y \in F$ est un élément de l'image de $g^2 - 2\,id$, cela signifie qu'on peut trouver un x appartenant à F tel que $y = g^2(x) - 2x$, mais alors $g(y) = g^3(x) - 2g(x) = 0$ d'après la question précédente, ce qui prouve que $y \in \ker(g)$, et donc l'inclusion souhaitée.

(e) Soit $M \in F$, d'après la question 1, on peut écrire que $M = aI + bA + cA^2$, puis que $g(M) = (a + 2c)A + bA^2$. Comme (I, A, A^2) forme une base de F, la matrice $g(M)$ est nulle si et seulement si $a+2c = b = 0$, soit $b = 0$ et $a = -2c$, ou encore si $M = c(A^2 - 2I)$, avec $c \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\ker(g) = \mathrm{Vect}(A^2 - 2I)$, et l'unique matrice (non nulle) $A^2 - 2I$ forme une base de ce noyau.

(f) D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(F) = 3$. Or, la question précédente montre que $\dim(\ker(g)) = 1$, donc $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 2$.

(g) On constate aisément que $g(I + A) = A + A^2$, mais rien de nous prouve que c'est la seule matrice pour laquelle l'égalité est vraie. En fait, on sait même que ce n'est pas le cas : $g(M) = A + A^2 \Leftrightarrow g(M) = g(I + A) \Leftrightarrow g(M - I - A) = 0 \Leftrightarrow M - I - A \in \ker(g)$. On a déterminé le noyau de g plus haut, on peut donc conclure que tous les antécédents de $A + A^2$ par l'application g sont les matrices de la forme $M = I + A + c(A^2 - 2I)$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Problème 2 (***).

1. La linéarité est évidente, elle découle de celle des opérations de dérivation et de multiplication par X dans $\mathbb{R}_3[X]$. De plus, si P est un polynôme de degré majoré par 3, $d^\circ(P') \leqslant 2$ et $d^\circ(P'') \leqslant 1$, ce qui permet de prouver immédiatement que $d^\circ(f(P)) \leqslant 3$ et donc que f est bien un endomorphisme.
2. On calcule pour cela les images des polynômes de la base canonique : $f(1) = -3$, puis $f(X) = (X - 4) \times 1 - 3X = -2X - 4$, $f(X^2) = X \times 2 + (X - 4) \times 2X - 3X^2 = -X^2 - 6X$ et enfin $f(X^3) = X \times (6X) + (X - 3)(3X^2) - 3X^3 = -6X^2$. Il ne reste plus qu'à écrire la matrice correspondante : $M = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. La matrice M est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale comporte un 0, elle ne peut pas être inversible (plus simplement, on peut aussi dire qu'elle contient une ligne entière de zéros). L'application f ne peut donc pas être bijective.
4. En notant $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = 0$ si $-3a - 4b = -2b - 6c = -c - 6d = 0$ (on utilise le fait que $f(X) = MX$, en notant X la matrice-colonne des coefficients du polynôme P, écrits dans l'ordre des puissances croissantes). Autrement dit, on doit avoir $c = -6d$, $b = -3c = 18d$, puis $a = -\dfrac{4}{3}b = -24d$, donc $P = dX^3 - 6dX^2 + 18dX - 24$. On conclut : $\ker(f) = \mathrm{Vect}(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 1$ et le théorème du rang assure alors que $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - 1 = 3$.
5. Le calcul de la matrice M effectué plus haut prouve que $d^\circ(f(P)) \leqslant 2$ (la dernière ligne étant nulle, la matrice-colonne de l'image aura toujours un dernier coefficient nul), donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Or, on a vu à la question précédente que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. On a donc nécessairement $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$. Pour prouver la supplémentarité de l'image et du noyau, il suffit de montrer que leur interstion ne contient que le polynôme nul, ce qui est ici évident (l'unique polynôme obtenu pour constituer une base du noyau étant de degré 3, il ne peut pas appartenir à l'image de f).
6. Par linéarité, $f(X - 4) = f(X) - 4f(1) = -2X - 4 + 12 = -2X + 8 = -2(X - 4)$. Le polynôme $X - 4$ est donc un vecteur propre de f, associé à la valeur propre -2.

7. On cherche donc les polynômes $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ vérifiant $f(P) = -P$. On peut déjà affirmer que $d = 0$ puisque $f(P)$ est un polynôme de degré majoré par 2. On se contente ensuite de reprendre l'expression donnée par la matrice M pour obtenir les équations $-3a - 4b = -a$, $-2b - 6c = -b$ et $-c = -c$ (une fois imposé $d = 0$). La dernière équation est manifestement inutile, et les deux restantes imposent $b = -6c$ puis $2a = -4b = 24c$ donc $a = 12c$. Finalement, on en déduit facilement que $\ker(f + id) = \text{Vect}(X^2 - 6X + 12)$. On peut donc poser $Q = X^2 - 6X + 12$ et $R = X^3 - 6X^2 + 18X - 24$ (cf calcul du noyau).

8. La famille $\mathcal{B}$ est échelonnée et constituée de quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$, c'est donc une base de cet espace vectoriel. De plus, elle est uniquement consituée de vecteurs propres pour l'application f : $f(1) = -3$, $f(X-4) = -2(X-4)$, $f(Q) = -Q$ et $f(R) = 0$, donc $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Il suffit d'écrire la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$, en faisant évidemment attention à bien écrire les coefficients dans le bon ordre : $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 12 & -24 \\ 0 & 1 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Notons en passant que, la matrice étant triangulaire supérieure, son inverse se calculerait en fait très rapidement.

10. (a) Les quatre matrices D, $D+I_4$, $D+2I_4$ et $D+3I_4$ sont diagonales, avec un 0 à une position différente de la diagonale (dernier coefficient pour D, troisième coefficient pour $D+I_4$ etc. Le produit des quatre va donc joyeusement s'annuler : $P_f(D) = 0$.

    (b) On sait que $D = P^{-1}MP$ donc $PDP^{-1} = M$. Il suffit alors de développer simplement le produit : $P(D + \lambda I_4)P^{-1} = PDP^{-1} + \lambda PI_4P^{-1} = M + \lambda I_4$.

    (c) La question précédente prouve que $P_f(M) = PDP^{-1}P(D+I_4)P^{-1}P(D+2I_4)P^{-1}P(D+3I_4)P^{-1} = PP_f(D)P{-1} = 0$.

    (d) Il suffit de faire la division euclidienne du polynôme X^n par P_f : $X^n = Q_nP_f + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX + d_n$, avec Q_n le quotient de cette division, et un reste de degré au maximum 3 puisqu'on divise par un polynôme de degré 4. Mais comme X^n et P_f ont tous les deux un coefficient constant nul (ils s'annulent en 0), on en déduit immédiatement que $d_n = 0$, d'où la formule de l'énoncé. Cette décomposition est bien sûr unique par unicité de la division euclidienne.

    (e) Le fait que l'application soit linéaire est évident ($(\lambda P + \mu Q)(M) = \lambda P(M) + \mu Q(M)$ quels que soient les polynômes P et Q). De plus, la question précédente montre que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = Q_n(M)P_f(M) + a_nM^3 + b_nM^2 + c_nM$. Comme $P_f(M) = 0$, on a en fait $M^n = a_nM^3 + b_nM^2 + c_nM$, donc $M^n \in \text{Vect}(M, M^2, M^3)$. Attention tout de même à ne pas oublier le cas particulier $M^0 = I_3$. Finalement, toutes les puissances de M appartiennent à l'espace vectoriel $\text{Vect}(I_3, M, M^2, M^3)$, et leurs combinaisons linéaires aussi, ce qui prouve exactement que $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(I_3, M, M^2, M^3)$ (on n'a techniquement seulement prouvé une inclusion, mais l'image contient manifestement les quatre matrices I_3, M, M^2 et M^3 qui sont simplement les images par φ des polynômes 1, X, X^2 et X^3). Il ne reste plus qu'à prouver que ces ces quatre matrices engendrent un espace vectoriel de dimension 4, donc forment une famille libre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Pour cela, supposons $aI_4 + bM + cM^2 + dM^3 = 0$. Par produit à gauche par P^{-1} et à droite par P, on en déduit la condition équivalente $aI_4 + bD + cD^2 + dD^3 = 0$. Les matrices étant diagonales, cette dernière égalité se traduit simplement par les quatre équations du système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & - & 3b & + & 9c & - & 27d & = & 0 \\ a & - & 2b & + & 4c & - & 8d & = & 0 \\ a & - & b+ & c & - & d & = & 0 & \\ a & & & & & & = & 0 & \end{array}\right.$.

Bien, déjà $a = 0$, l'avant-dernière équation devient alors $d = c - b$. On reporte dans les deux autres équations : $24b - 18c = 6b - 4c = 0$, ce qui n'est possible que si $b = c = 0$ (les équations ne sont pas proportionnelles). On en déduit $d = 0$, la famille est donc bien libre, et l'application φ de rang 4 comme annoncé. Comme l'application $f \mapsto Mat_{can}(f)$ est par ailleurs un isomorphisme entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{\ni}[\mathcal{X}])$ et $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on en déduit immédiatement que la famille (f^n) engendre un espace vectoriel de dimension 4 égal à $\mathrm{Vect}(id, f, f^2, f^3)$ (pour tout entier n supérieur ou égal à 4, avec les mêmes notations que précédemment, on aura $f^n = a_n f^3 + b_n f^2 + c_n f$).