Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 22 : Matrices et algèbre linéaire

MPSI Lycée Camille Jullian

13 mai 2024

Exercice 1 (*)

Déterminer la matrice dans la base canonique de l'espace vectoriel E des applications linéaires suivantes (on ne vérifiera pas la linéarité) :

1. $f(x, y, z) = (x + y - 2z, 2x + y - z, -x - 3y + 2z)$, $E = \mathbb{R}^3$
2. $f(P) = (2X + 1)P - X^2P'$, $E = \mathbb{R}_2[X]$
3. $f(P) = \displaystyle\int_X^{X+2} P(t)\ dt$, $E = \mathbb{R}_2[X]$
4. $f(M) = AM + MB$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (*)

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Prouver que s est une symétrie, et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 3 (**)

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'application f qui, à un polynôme P, associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X + 1$. Vérifier à l'aide de cette matrice que f est un projecteur, et en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 4 (**)

Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathcal{C} = ((3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7))$.

Exercice 5 (**)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 + X + 1)P' - (2X - 1)P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme, et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. L'application φ est-elle bijective ? Déterminer un antécédent par φ de $X^2 - 1$.
3. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + x + 1)y' - (2x - 1)y = x^2 - 1$.

Exercice 6 (***)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ un morphisme vérifiant $u^2 + u + id = 0$.

1. Montrer que u est bijectif, et déterminer u^{-1} en fonction de u.
2. Montrer que, pour tout vecteur non nul x, $\text{Vect}(x, u(x))$ est de dimension 2.

3. Prouver l'existence d'une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f devient $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les puissances de la matrice B, puis celles de A.

Exercice 8 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0$.
2. En déduire que $\ker(f - id) \oplus \ker(f + 3\,id) = \mathbb{R}^3$.
3. Donner la dimension et une base de chacun des deux noyaux de la question précédente.
4. Sans faire de calculs, déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale (et donner cette matrice).

Exercice 9 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $f^3 = 0$ mais $f^2 \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer l'ensembles des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec u. On montrera en particulier qu'ils forment un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 10 (**)

Soient $e_1 = (1, -1, -3)$, $e_2 = (1, 0, 3)$ et $e_3 = (2, -1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire sur F et G ?
2. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Quelle est la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$?
3. Calculer la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$.
4. Calculer la matrice de s dans la base canonique en exploitant les questions précédentes, en déduire l'expression analytique de s.

Exercice 11 (***)

On considère trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par leurs premiers termes x_0, y_0, z_0 et les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(-x_n - 3y_n + 6z_n)$, $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(3x_n + 5y_n - 6z_n)$ et $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(3x_n + 3y_n - 4z_n)$.

1. Montrer que ce système peut s'écrire sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et X_n, X_{n+1} sont des matrices colonnes.

2. Déterminer $S_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ et $S_{-2} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.
3. Montrer que S_1 et S_{-2} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en donner des bases.
4. En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice A^n et en déduire X_n en fonction de X_0.

Exercice 12 (*)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathcal{B}$ la famille $(X^2+1, X+1, 2X^2-X)$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, et celle de $\mathcal{B}$ vers la base canonique.
3. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. On considère l'endomorphisme de E défini par $\varphi(P) = XP'$. Déterminer sa matrice dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 13 (**)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans le base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Que peut-on en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Donner la matrice de f dans une base constituée uniquement de vecteurs de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 14 (*)

Déterminer à chaque fois si la matrice A_i est semblable à la matrice B_i.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 15 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Pour un réel λ quelconque, calculer $\ker(A - \lambda I_3)$.
2. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda\, id$ n'est pas bijective.
3. Donner une base de $\ker(f - \lambda\, id)$ pour les valeurs de λ obtenues à la question précédente.
4. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 16 (**)

On note dans cet exercice $E = \mathbb{R}^3$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'application définie par $f(x,y,z) = (2x - y + z, x + z, x - y + 2z)$.

1. Déterminer la matrice A représentant l'application f dans la base canonique de E.

2. Calculer A^2, puis déterminer une relation entre A^2, A et la matrice identité I. En déduire une expression de la réciproque f^{-1} de f en fonction de f et de id.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\ker(A - \lambda I)$, et en déduire les valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda\, id$ n'est pas un automorphisme.
4. Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels $\ker(f - id)$ et $\ker(f - 2\, id)$.
5. Montrer que les deux sous-espaces étudiés à la question précédente sont supplémentaires dans E.
6. (a) Déterminer deux applications linéaires p et q telles que $p+q = id$ et $2p+q = f$ (on les exprimera en fonction de f et de id, pas besoin de donner une expression explicite).
   (b) Vérifier que p et q sont des projecteurs, et que $p \circ q = q \circ p = 0$.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 17 (***)

On considère dans cet exercice l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x - y - z, 7x - 2y - 5z, -x - y + 2z) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Donner la matrice M représentant l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base du noyau et de l'image de f. La matrice M est-elle inversible ?
4. Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires.
5. Déterminer l'expression explicite de la symétrie par rapport à $\ker(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$.
6. Calculer les noyaux $\ker(f+id)$ et $\ker(f-3\,id)$, et donner une base de chacun d'eux. Que représentent les vecteurs de ces bases pour l'application f ?
7. À l'aide des calculs effectués dans les questions précédentes, déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale$D$ à préciser.
8. Donner la matrice de passage $P_{\text{can}\to\mathcal{B}}$, et calculer son inverse P^{-1}. Rappeler le lien entre les matrices M, D et P.
9. Vérifier que $f^3 = 2f^2 + 3f$. En déduire l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) telles que, $\forall n \geqslant 1$, $f^n = a_n f^2 + b_n f$.
10. Calculer explicitement a_n et b_n, en déduire une expression de f^n (on ne demande pas d'écrire explicitement $f^n(x,y,z)$).
11. On pose $p = \dfrac{1}{12}(f^2 + f)$ et $q = \dfrac{1}{4}(f^2 - 3f)$. Montrer que p et q sont des projecteurs.
12. Calculer $f \circ p$ et $f \circ q$ (on doit obtenir une expression simple en fonction de p et de q).
13. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $f^n = 3^n p + (-1)^n q$, et retrouver ainsi l'expression de f^n obtenue en question 9.

Problème 1 (**)

On note dans tout cet exercice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On notera par ailleurs f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique (base qui sera notée $\mathcal{B}$ dans la suite de l'exercice).

On note enfin $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

A. Calcul matriciel.

1. Calculer A^2 et montrer que $A^3 = 2A$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\ker(f - \sqrt{2}\, id)$.
3. Soient $u = (1,0,-1)$, $v = (1,\sqrt{2},1)$ et $w = (1,-\sqrt{2},1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, qu'on notera $\mathcal{B}'$.

4. Écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. On notera P cette matrice.
5. Déterminer l'inverse P^{-1} de la matrice P.
6. Écrire la matrice A' de l'application f dans la base $\mathcal{B}'$.

B. Étude d'une application linéaire.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et que la famille (I_3, A, A^2) en constitue une base.
2. Montrer que, $\forall M \in F$, $AM \in F$.
3. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que $g \in \mathcal{L}(F)$.
   (b) Écrire la matrice de g dans la base (I, A, A^2).
   (c) Montrer que $g \circ g \circ g = 2g$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(g^2 - 2\,id) \subset \ker(g)$.
   (e) Déterminer une base de $\ker(g)$.
   (f) Déterminer $\dim(\mathrm{Im}(g))$.
   (g) Résoudre dans F l'équation $g(M) = A + A^2$.

Problème 2 (***)

On considère dans cet exercice l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP'' + (X-4)P' - 3P \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. L'endomorphisme f est-il bijectif (on devra traiter cette question uniquement en exploitant la matrice M obtenue à la question précédente) ?
4. Calculer le noyau de f. En déduire le rang de l'application f.
5. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$, et que $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}_3[X]$.
6. Calculer $f(X-4)$. Que peut-on dire du polynôme $X-4$ par rapport à l'application f ?
7. Calculer $\ker(f + id)$. On notera Q un polynôme formant une base de ce noyau, et R un polynôme engendrant le noyau de f.
8. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X-4, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, et donner la matrice D de l'application f dans la base $\mathcal{B}$.
9. Donner une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}MP = D$ (on ne demande pas de calculer P^{-1}).
10. On note désormais P_f le polynôme $P_f = X(X+1)(X+2)(X+3)$.
    (a) Calculer $P_f(D)$ (où D est toujours la matrice obtenue en question 8).
    (b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de M la valeur de $P(D + \lambda I_4)P^{-1}$.
    (c) En déduire la valeur de $P_f(M)$.
    (d) Pour tout entier naturel n non nul, montrer qu'il existe un unique polynôme Q_n et trois réels (a_n, b_n, c_n) tels que $X^n = Q_n P_f + a_n X^3 + b_n X^2 + c_n X$.
    (e) Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto & P(M) \end{array} \right.$ est un morphisme de rang 4. En déduire que la famille $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendre un sous-espace vectoriel de dimension 4 dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.