Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 1 : Logique, ensembles.

MPSI Lycée Camille Jullian

4 septembre 2023

Exercice 1 (* à **)

Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f est ici une fonction réelle qui jouera un rôle de variable libre) :

- L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- La fonction f est constante.
- Tout réel a (au moins) un antécédent par f.
- La fonction f ne prend pas de valeur négative.
- Tout réel a (au moins) deux antécédents par f.
- La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
- La courbe représentative de fonction f coupe celle de la fonction ln.

Exercice 2 (*)

Exprimer la contraposée de chacun des énoncés suivants :

1. Je suis un génie des mathématiques, donc j'ai choisi de faire une MPSI.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, n impair $\Rightarrow n^3$ impair.
3. Je ne sais pas écrire une contraposée, donc je ne vais pas réussir à faire cet exercice.
4. (u_n) est une suite croissante $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
5. Tous les roux sont des sadiques, donc M.Lafon ne va mettre que des mauvaises notes au premier DS de maths de l'année.

Exercice 3 (**)

Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 2$
- $\exists x \in \mathbb{N}$, $2 < x < 4$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant x$
- $\forall x > 0$, $\exists y > 0$, $y < x$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $p = 2n$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n = 2p$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) = 2p$
- $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y^2$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y > 0$, $y = \ln(x)$
- $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, $\exists x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y > x$, $\exists z \in \mathbb{Q}$, $x < z < y$

Exercice 4 (*)

Énoncer la négation de chacune des propositions de l'exercice 3 (avec des quantificateurs, bien entendu).

Exercice 5 (*)

On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère les ensembles $A = [4,7]$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 5\}$, et $C = \mathbb{N}$. Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants : $A \cup B$; $A \cap C$; $[-2,12] \backslash B$; $A \cap \overline{C}$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$.

Exercice 6 (**)

Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
2. $[(A \cap B) \cup (A \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

Exercice 7 (**)

Prouver rigoureusement l'égalité entre les deux ensembles $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 3\}$ et $B = \{(t-1, 5-2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 8 (**)

Soit E un ensemble, A, B et C trois de ses sous-ensembles. Montrer les propriétés suivantes :

1. $(B \subset C) \Rightarrow (A \cup B) \subset (A \cup C)$.
2. si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.
3. $A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$.
4. $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$

Exercice 9 (**)

Soient E et F deux ensembles, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E et $(B_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de F.

1. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i \in I} (A_i \times B) = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times B$.
2. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i) = \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right)$.
3. Cette dernière propriété serait-elle vraie pour une union ? Justifier.

Exercice 10 (*)

Écrire en extension l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\}))$.
Écrire en extension l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists (p,n) \in \mathbb{N}^2, x = \dfrac{p}{n}$ et $2 \leqslant p \leqslant 3n \leqslant 10\}$.

Exercice 11 (*)

On note, pour tout entier naturel n, $E_n = \{kn \mid k \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}\}$. Décrire plus simplement l'ensemble $F = \mathbb{N} \backslash \left(\displaystyle\bigcup_{n \geqslant 2} E_n\right)$.

Exercice 12 (**)

Soient E et F deux ensembles. Déterminer dans chacun des trois cas suivants les inclusions possibles entre les deux ensembles proposés (on justifiera chaque inclusion, et on donnera un contre-exemple pour chaque inclusion fausse) :

1. $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(E \cup F)$
2. $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(E \cap F)$
3. $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(E \times F)$

Exercice 13 (***)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(y - f(x)) = 2 - x - y$.

Exercice 14 (**)

Soit f une fonction réelle vérifiant $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$ (en supposant $z \neq x$ et $z \neq y$). Montrer que f est nécessairement une fonction affine.

Exercice 15 (***)

Si P et Q sont deux propositions mathématiques, on définit un nouveau connecteur logique « non et », symbolisé par la notation $P \uparrow Q$, par $P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$. Autrement dit, la proposition $P \uparrow Q$ est vraie si et seulement si $P \wedge Q$ est fausse (comme son nom l'indique).

1. Écrire la table de vérité de $P \uparrow Q$.
2. Si P, Q et R sont trois propositions, est-ce que $(P \uparrow Q) \uparrow R$ est équivalente à $P \uparrow (Q \uparrow R)$?
3. Montrer qu'on peut exprimer $\neg P$ uniquement à l'aide de P et du symbole $\uparrow$.
4. Exprimer $P \vee Q$ et $P \wedge Q$ uniquement en fonction de P, Q, et $\uparrow$.
5. Exprimer l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ uniquement à l'aide de P, Q et $\uparrow$.

Problème (***)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E, on appelle différence symétrique de A et B l'ensemble noté $A \Delta B$ et défini par $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

1. Montrer qu'on a également $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
2. Montrer que la différence symétrique est une opération associative.
3. Montrer que l'intersection est distributive par rapport à la différence symétrique : si A, B et C sont trois sous-ensembles de E, alors $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
4. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que l'union n'est pas distributive par rapport à la différence symétrique.
5. Montrer que, l'ensemble A étant fixé, il existe un unique ensemble B tel que $A \Delta B = \emptyset$.
6. Montrer de même qu'il existe un unique B tel que $A \Delta B = E$.
7. Plus généralement, montrer que l'application $B \mapsto A \Delta B$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même. Quelle est la réciproque de cette application ?