

# Feuille d'exercices n° 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

21 septembre 2023

## Exercice 1 (\*)

1. Il faut résoudre l'inéquation  $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$ . Le trinôme correspondant a pour discriminant  $\Delta = 9 + 16 = 25$ , donc admet deux racines réelles  $x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$  et  $x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ . Le trinôme étant positif en-dehors des racines,  $\mathcal{D}_f = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup [2, +\infty[$ .
2. L'exponentielle est là pour faire joli, ce qui est important c'est d'avoir  $x + 5 > 0$ , soit  $x > -5$ , donc  $\mathcal{D}_f = ] -5, +\infty[$ .
3. Le dénominateur interdit les valeurs  $-2$  et  $2$ . Reste à vérifier quand le numérateur est positif. C'est le cas en-dehors de ses racines  $0$  et  $-1$ , donc  $\mathcal{D}_f = ] -\infty, -2[ \cup ] -2, 0[ \cup [1, 2[ \cup ]2, +\infty[$ .
4. Il faut déterminer quand  $x^5 + 1 > 0$ , autrement dit quand  $x^5 > -1$ . Or, on sait que  $x \mapsto x^5$  est une fonction strictement croissante, et que  $(-1)^5 = -1$ , donc  $x^5 > -1 \Leftrightarrow x > -1$  et  $\mathcal{D}_f = ] -1, +\infty[$ .

## Exercice 2 (\* à \*\*)

1. La fonction  $f$  est paire (elle est somme de fonctions puissances paires).
2. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  et paire puisque  $\forall x \neq 0, f(-x) = \ln(|-x|) = \ln(|x|) = f(x)$ .
3. Cette fonction très laide est paire : elle est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$  (ce qui est sous la racine est toujours strictement positif, par contre les trois valeurs enlevées annulent le premier dénominateur) et  $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = \frac{1}{((-x)^3 - 2 \times (-x))^2} \times \frac{(-x)^4}{\sqrt{(-x)^2 + 2}} = \frac{1}{(2x - x^3)^2} \times \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}} = f(x)$  car  $(2x - x^3)^2 = (x^3 - 2x)^2$  (prendre la carré d'un nombre ou de son opposé donne toujours le même résultat).
4. Cette fonction est définie sur  $] -\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ , et elle est paire :  $f(-x) = |2(-x)^2 - e^{(-x)^4} + \ln((-x)^2 - 1)| = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)| = f(x)$ .
5. Cette dernière fonction est définie sur  $] -1, 1[$ , et elle est impaire :  $f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$  (on a simplement utilisé le fait que  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ ).

## Exercice 3 (\*\* à \*\*\*)

1. En posant  $X = x^2$ , on se ramène à l'équation  $X^2 + X - 20 = 0$ , qui a pour discriminant  $\Delta = 1 + 80 = 81$ , donc admet deux racines  $X_1 = \frac{-1+9}{2} = 4$  et  $X_2 = \frac{-1-9}{2} = -5$ . La valeur  $-5$  est à éliminer pour  $x^2$ , donc on a nécessairement  $x^2 = 4$ , d'où  $\mathcal{S} = \{-2, 2\}$ .

2. Cette équation du troisième degré admet  $-1$  comme racine évidente :  $(-1)^3 - 5(-1)^2 + 2 \times (-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$ . On peut donc factoriser le membre de gauche sous la forme  $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$ . Par identification des coefficients, on doit avoir  $a = 1$ ;  $a+b = -5$ , donc  $b = -6$ ;  $b+c = 2$  donc  $c = 8$ , ce qui est cohérent avec la dernière condition. Notre équation est vérifiée si  $x = -1$  ou  $x^2 - 6x + 8 = 0$ , équation de discriminant  $\Delta = 36 - 32 = 4$ , et de racines  $x_1 = \frac{6-2}{2} = 2$  et  $x_2 = \frac{6+2}{2} = 4$ . Conclusion :  $\mathcal{S} = -1, 2, 4$ .
3. L'inéquation est définie lorsque  $x+2$  et  $3x-6$  sont tous deux strictement positifs, donc pour  $x > 3$ . Elle revient alors à  $\ln \frac{x+2}{2x-6} \leq \ln 2$ , soit  $\frac{x+2}{2x-6} \leq 2$ , donc  $\frac{-3x+14}{2x-6} \leq 0$ . Comme  $2x-6$  a déjà été supposé positif,  $\mathcal{S} = \left[ \frac{14}{3}; +\infty \right[$ .
4. En faisant tout passer à gauche, on se ramène à  $\frac{-5x-11}{x^3+2x^2-5x-6} \geq 0$ . Le signe du numérateur est facile à obtenir, mais pour le dénominateur il faut commencer par le factoriser. On constate que  $-1$  est racine du dénominateur :  $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$ . On peut donc écrire  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$ . Par identification des coefficients, on a  $a = 1$ ,  $b = 1$  et  $c = -6$ , donc  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2 + x - 6)$ . Le dernier facteur a pour discriminant  $\Delta = 1 + 24 = 25$  et admet deux racines  $x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$  et  $x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$ . On peut désormais faire un gros tableau de signes :

$x$	$-3$	$-\frac{11}{5}$	$-1$	$2$				
$-5x-11$	+	+	0	-	-	-		
$x^3+2x^2-5x-6$	-	0	+	+	0	-	0	+
$Q$	-	+	0	-	+	-		

Conclusion :  $\mathcal{S} = \left] -3, -\frac{11}{5} \right] \cup ] -1, 2[$ .

5. Commençons par constater que l'inéquation ne peut avoir de sens que si  $x \geq -2$ . Lorsque  $x \in [-2, 1]$ , l'inéquation sera certainement vérifiée puisque le membre de gauche est alors négatif, et le membre de droite positif. Reste le cas  $x > 1$ , où on peut se permettre de tout élever au carré puisque les deux membres de l'inégalité sont alors positifs : on obtient  $x^2 - 2x + 1 \leq x + 2$ , soit  $x^2 - 3x - 1 \leq 0$ . Ce trinôme a pour discriminant  $\Delta = 9 + 4 = 13$ , et s'annule donc en deux valeurs  $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$  et  $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ . Le trinôme est négatif entre ses racines, donc sur l'intervalle  $[x_1, x_2]$ . Comme  $x_1 < 1$  et  $x_2 > 1$ , on en déduit concernant notre inéquation initiale que  $\mathcal{S} = \left[ -2, \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right]$ .
6. Commençons par remarquer que l'équation n'est définie que sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ . Avant de passer à l'exponentielle, il est indispensable de regrouper les deux  $\ln$  de gauche pour n'avoir qu'un seul  $\ln$  de chaque côté, ce qui donne  $\ln(x^2 + 2x - 3) = \ln 4$ , donc  $x^2 + 2x - 7 = 0$ . Ce trinôme a pour discriminant  $\Delta = 4 + 28 = 32$ , et admet donc deux racines  $x_1 + \frac{-2+4\sqrt{2}}{2} = -1+2\sqrt{2}$ , et  $x_2 = -2-2\sqrt{2}$ . La deuxième solution n'appartient pas à l'intervalle de définition, donc  $\mathcal{S} = \{2\sqrt{2} - 1\}$ .
7. Tout étant positif, on peut passer au  $\ln$  :  $3 \times 2^{3x-4} \geq 2^4 \Leftrightarrow \ln 3 + (3x-4)\ln 2 \geq 4\ln 2$ , soit  $(3x-8)\ln 2 \geq -\ln 3$ , donc  $x \geq \frac{8\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2}$ , donc  $\mathcal{S} = \left[ \frac{8\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2}, +\infty \right[$ .

8. Commençons pas signaler que l'inéquation n'a de sens que si  $2x - 3 > 0$ , soit  $x > \frac{3}{2}$ . Ensuite c'est très simple : puisque la fonction  $\ln$  est strictement croissante,  $\ln(2x-3) \leq \ln 5 \Leftrightarrow 2x-3 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 4$ , donc  $\mathcal{S} = \left] \frac{3}{2}, 4 \right[$ .
9. En faisant passer quelques termes à droite, on obtient  $2^{3x-1} = 5^{x+1} - 5^x = 5^x(5-1) = 4 \times 5^x$ , soit en prenant le  $\ln$  des deux côtés  $(3x-1)\ln 2 = \ln 4 + x \ln 5$ , donc  $x(3\ln 2 - \ln 5) = 3\ln 2$ , et  $x = \frac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}$ , donc  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5} \right\}$ .
10. Cette équation n'a de sens que si  $x > 0$  (on peut éventuellement extrapoler que 0 va aussi être solution de l'équation, si on arrive à donner un sens à  $0^0$ ). En prenant les  $\ln$ , on obtient alors  $\sqrt{x} \ln x = x \ln(\sqrt{x}) = x \frac{\ln x}{2}$ , donc  $\ln x \left( \sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) = 0$ . On en déduit que soit  $\ln x = 0$ , c'est-à-dire  $x = 1$ , soit  $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$ , auquel cas on obtient en élevant au carré (on peut, tout est positif)  $x = \frac{x^2}{4}$ , soit  $x(x-4) = 0$ , donc  $x = 4$  (0 ayant été exclu dès le départ). Conclusion :  $\mathcal{S} = \{1, 4\}$ .
11. Celle-ci est un piège assez vicieux. On ne sait pas vraiment résoudre ce genre d'équation, mais on peut constater que  $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3$  est une fonction strictement croissante sur son domaine de définition  $]0, +\infty[$ , et qu'elle prend pour valeur 0 en 1. Elle ne peut donc pas s'annuler plus d'une fois et  $\mathcal{S} = \{1\}$ .
12. Ça doit presque être un réflexe pour ce genre d'équations : on pose  $X = e^{-2x}$  et on obtient  $X^3 + 3X^2 - X - 3 = 0$ . On constate (comme d'habitude) que 1 est racine évidente de l'équation, et on peut donc écrire  $(X^3 + 3X^2 - X - 3) = (X-1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$ , soit après identification  $a = 1$ ;  $b = 4$  et  $c = 3$ . Reste à résoudre  $X^2 + 4X + 3 = 0$ , équation ayant pour discriminant  $\Delta = 16 - 12 = 4$  et pour racines réelles  $X_1 = \frac{-4+2}{2} = -1$  et  $X_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$ . Ces deux dernières valeurs n'étant pas très compatibles avec le changement de variable effectué, la seule possibilité restante est  $e^{-2x} = 1$ , ce qui donne  $x = 0$ , donc  $\mathcal{S} = \{0\}$ .
13. Posons  $X = 8^{3x}$ , on cherche alors à résoudre  $X^2 - 3X - 4 \leq 0$ , inéquation ayant pour discriminant  $\Delta = 9 + 16 = 25$ , soit deux racines réelles  $X_1 = \frac{3-5}{2} = -1$  et  $X_2 = \frac{3+5}{2} = 4$ . On doit donc avoir  $-1 \leq 8^{3x} \leq 4$ . La première inégalité est toujours vérifiée, puisque la puissance est nécessairement positive. Quant à la deuxième, elle devient, en passant au  $\ln$ ,  $3x \ln 8 \leq \ln 4$ , soit  $x \leq \frac{\ln 4}{3 \ln 8}$ . Comme  $\frac{\ln 4}{3 \ln 8} = \frac{2 \ln 2}{9 \ln 2} = \frac{2}{9}$ , on a donc  $\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{2}{9} \right]$ .
14. La deuxième équation du système peut se traduire par  $\log(xy) = 4$ , soit, en passant à l'exponentielle de base 10,  $xy = 10^4 = 10\,000$ . Les réels  $x$  et  $y$  sont alors solutions de l'équation  $x^2 - 520x + 10\,000 = 0$ , qui a pour discriminant  $\Delta = 520^2 - 40\,000 = 230\,400$ , et admet deux racines réelles  $x_1 = \frac{520-480}{2} = 20$  et  $x_2 = \frac{520+480}{2} = 500$  (notez qu'on peut facilement vérifier que ces deux nombres sont solutions du problème posé). On a donc  $\mathcal{S} = \{(20, 500), (500, 20)\}$ .
15. On se contente de tout écrire à l'aide des exponentielles. Quitte à tout multiplier par 2, cela donne  $4(e^x + e^{-x}) + 3(e^x - e^{-x}) - 8 = 0$ , soit  $7e^x - 8 + e^{-x} = 0$ . En posant  $X = e^x$  (et en multipliant tout par  $e^x$ , on se ramène à l'équation du second degré  $7X^2 - 8X + 1 = 0$ . Son discriminant vaut  $\Delta = 64 - 28 = 36$ , et ses solutions sont  $X_1 = \frac{8+6}{14} = 1$  et  $X_2 = \frac{8-6}{14} = \frac{1}{7}$ . On trouve donc deux solutions à l'équation initiale :  $x = \ln(1) = 0$ , et  $x = -\ln(7)$ .
16. Les valeurs  $x = -1$  et  $x = -\frac{1}{2}$  sont interdites pour cette équation (puisqu'elles annulent ce qui se trouve à l'intérieur d'un  $\ln$ ). Le reste du temps, on peut écrire le membre de droite comme

un ln de quotient et tout composer par l'exponentielle pour obtenir l'inéquation équivalente  $\left| \frac{x+1}{2x+1} \right| \leq 2$ . Cette inéquation est équivalente à l'encadrement  $-2 \leq \frac{x+1}{2x+1} \leq 2$ . L'inéquation de gauche de cet encadrement peut se réécrire sous la forme  $\frac{5x+3}{2x+1} \geq 0$ , elle est vérifiée sur  $\left] -\infty, -\frac{3}{5} \right] \cup \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$ . L'inégalité de droite peut se mettre sous la forme  $\frac{3x+1}{2x+1} \geq 0$ , elle est vérifiée sur  $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ -\frac{1}{3}, +\infty \right[$ . Finalement,  $\mathcal{S} = \left] -\infty, -\frac{3}{5} \right] \cup \left[ -\frac{1}{3}, +\infty \right[$ , ensemble auquel il faut encore enlever la valeur 1.

17. Commençons par constater que  $X^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ . Quitte à tout diviser par  $x^2$  (de toute façon, 0 n'est pas solution de notre équation), l'équation initiale est équivalente à  $x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ , soit  $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$ . On effectue notre changement de variables :  $X^2 + 2X - 3 = 0$ . Cette équation a pour solution évidente  $X_1 = 1$  et pour deuxième solution  $X_2 = -3$  (on peut bien sûr calculer un discriminant pour les obtenir). Reste à retrouver les valeurs correspondantes de  $x$  à chaque fois :  $X = 1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ . Cette équation a pour discriminant  $\Delta = 1 - 4 = -3$  et admet pour solutions complexes  $x_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$  et  $x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ . De même,  $X = -3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$ , équation de discriminant  $\Delta = 9 - 4 = 5$ , admettant deux solutions réelles  $x_3 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$  et  $x_4 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ . On a bien entendu  $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ .

18. On peut tout réécrire à l'aide de l'unique fonction  $\ln : \frac{\ln(x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(x)}{\ln(4)} + \frac{\ln(x)}{\ln(8)} = \frac{11}{2}$ . Comme  $\ln(4) = 2\ln(2)$  et  $\ln(8) = 3\ln(2)$ , on trouve en fait  $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2}$ , soit  $\frac{11 \ln(x)}{6 \ln(2)} = \frac{11}{2}$ . Finalement,  $\ln(x) = 3\ln(2)$ , donc  $x = e^{3\ln(2)} = 2^3 = 8$ . Il n'y a qu'une solution à l'équation :  $\mathcal{S} = \{8\}$ .

19. Réécrivons le système à coup d'exponentielles, en multipliant tout par 2 pour simplifier : 
$$\begin{cases} e^x + e^{-x} + e^y + e^{-y} = 8 \\ e^x - e^{-x} + e^y - e^{-y} = 2 \end{cases}$$
. En additionnant les deux équations (et en simplifiant par 2), on a donc  $e^x + e^y = 5$ . De même, en soustrayant,  $e^{-x} + e^{-y} = 3$ . Posons maintenant  $X = e^x$  et  $Y = e^y$ , les équations deviennent  $X + Y = 5$  et  $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = 3$ , soit  $\frac{X+Y}{XY} = 3$ , ce qui implique  $XY = \frac{5}{3}$  en exploitant la première équation. Autrement dit,  $Y = \frac{5}{3X}$ , donc  $X + \frac{5}{3X} = 5$ , puis  $X^2 - 5X + \frac{5}{3} = 0$ . Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation du second degré, qui a pour discriminant  $\Delta = 25 - \frac{20}{3} = \frac{55}{3}$ , et pour solutions

$X_1 = \frac{10 - \sqrt{\frac{55}{3}}}{2} = \frac{1}{6}(15 - \sqrt{165})$ , et  $X_2 = \frac{1}{6}(15 + \sqrt{165})$ . On constate que  $X = X_1 \Rightarrow Y = X_2$  et  $X = X_2 \Rightarrow Y = X_1$  (ce qui est logique,  $Y$  vérifiant la même équation du second degré que  $X$ ). Les deux nombres obtenus étant strictement positifs, on peut remonter sans problème le changement de variable :  $x = \ln\left(\frac{1}{6}(15 - \sqrt{165})\right)$  et  $y = \ln\left(\frac{1}{6}(15 + \sqrt{165})\right)$ , ou bien les deux valeurs sont échangées.

## Exercice 4 (\*\*)

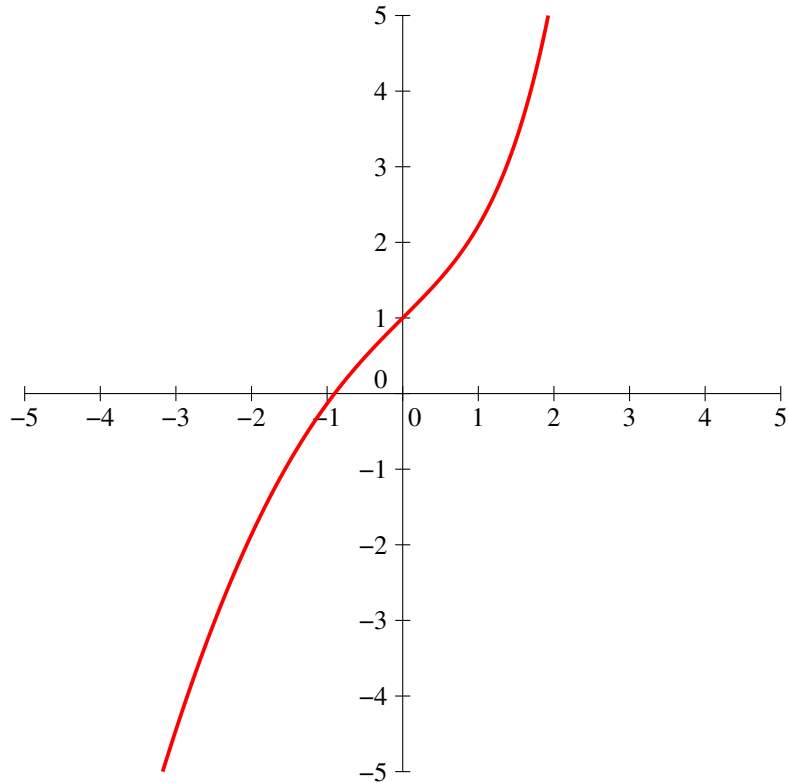
1. La fonction  $x \mapsto -2x + 3$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ , et l'exponentielle est strictement croissante, donc la composée  $x \mapsto e^{-2x+3}$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus, elle est à valeurs dans  $]0, +\infty[$  (une exponentielle est toujours positive), intervalle sur lequel la fonction inverse est décroissante. Conclusion :  $x \mapsto \frac{1}{e^{-2x+3}}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Comme on multiplie ceci par  $-\frac{5}{2}$ , le sens de variation change encore une fois, et  $f$  est finalement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soustraire 3 à la fin ne changera pas le sens de variation, concentrons-nous donc sur le carré. La fonction  $x \mapsto e^x + 2$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs strictement positives, et la fonction carré est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
3. Cette fois-ci c'est différent, car  $e^x - 3$  ne prend pas toujours des valeurs positives. Plus précisément  $e^x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \ln 3$ . Sur  $] -\infty; \ln 3]$ ,  $x \mapsto e^x - 3$  est donc croissante et à valeurs dans  $] -\infty, 0]$ , intervalle sur lequel la fonction carré est décroissante. La fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur  $] -\infty, \ln 3]$ . Sur  $[\ln 3, +\infty[$ ,  $x \mapsto e^x - 3$  est croissante et à valeurs positives, et cette fois  $f$  sera strictement croissante.
4. Commençons par constater que  $f$  n'est pas définie partout :  $e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow x < 0$ . Ensuite, la fonction  $x \mapsto -x$  étant strictement décroissante sur  $] -\infty, 0[$ , et les fonctions exponentielle et  $\ln$  strictement croissantes sur leurs ensembles de définition, on en déduit facilement que  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 0[$ .
5. Notre dernière fonction est définie si  $\frac{x+1}{x-1} > 0$ , soit  $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  (un petit tableau de signe pour le vérifier). Pour obtenir son sens de variations, il peut être utile de faire la petite modification suivante :  $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$ . La fonction  $x \mapsto \frac{2}{x-1}$  étant strictement décroissante sur  $] -\infty, -1[$  et sur  $]1, +\infty[$ , et le logarithme népérien étant strictement croissant sur son ensemble de définition, la fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur  $] -\infty, -1[$ , ainsi que sur  $]1, +\infty[$ .

## Exercice 5 (\* à \*\*\*)

1. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $f'(x) = e^x - x$  et de dérivée seconde  $f''(x) = e^x - 1$ . La fonction  $f''$  s'annule en 0, donc on obtient pour  $f'$  le tableau de variations suivant :

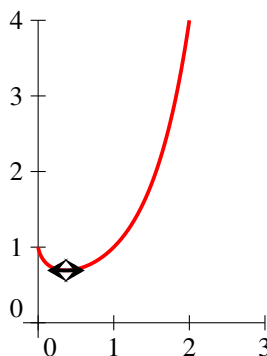
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$1$	$+\infty$

(les limites ne posent pas de difficulté de calcul). Comme  $1 > 0$ ,  $f'$  est toujours strictement positive, et  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Les limites de  $f$  se calculent elles aussi assez facilement :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  (pas de forme indéterminée ici), et en  $+\infty$ , on peut écrire  $f(x) = e^x \left(1 - \frac{x^2}{2e^x}\right)$ , où la parenthèse a pour limite 1 par croissance comparée, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Pour tracer à la main une courbe représentative correcte, il faudrait calculer quelques points car on manque cruellement d'informations. On peut toujours constater que  $f(0) = 1$ . En tout cas, la courbe ressemble à ceci :



2. La fonction  $f$  est définie sur  $]0, +\infty[$ , et on peut l'écrire sous forme exponentielle  $f(x) = e^{x \ln x}$ . Elle a donc pour dérivée  $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x}$ . Cette dérivée s'annule lorsque  $\ln x = -1$ , c'est-à-dire pour  $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ , et  $f$  est donc décroissante sur  $]0; \frac{1}{e}]$  et croissante sur  $[\frac{1}{e}; +\infty[$ . On peut calculer les limites de  $f$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$  (croissance comparée), donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (pas de problème pour celle-là). Après avoir calculé  $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$ , on obtient le tableau de variations et la courbe suivants :

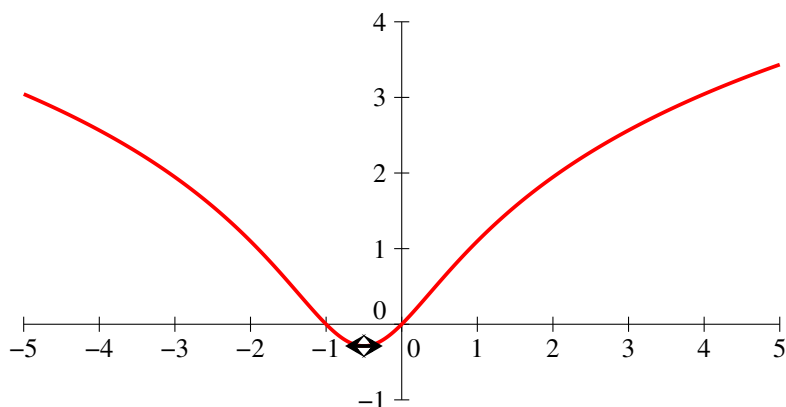
$x$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f$	1	$e^{-\frac{1}{e}}$	$+\infty$



3. Intéressons-nous pour commencer au domaine de définition de  $f$ , et cherchons pour cela les racines du trinôme  $1 + x + x^2$ . Il a pour discriminant  $\Delta = 1 - 4 = -3$ , donc est toujours

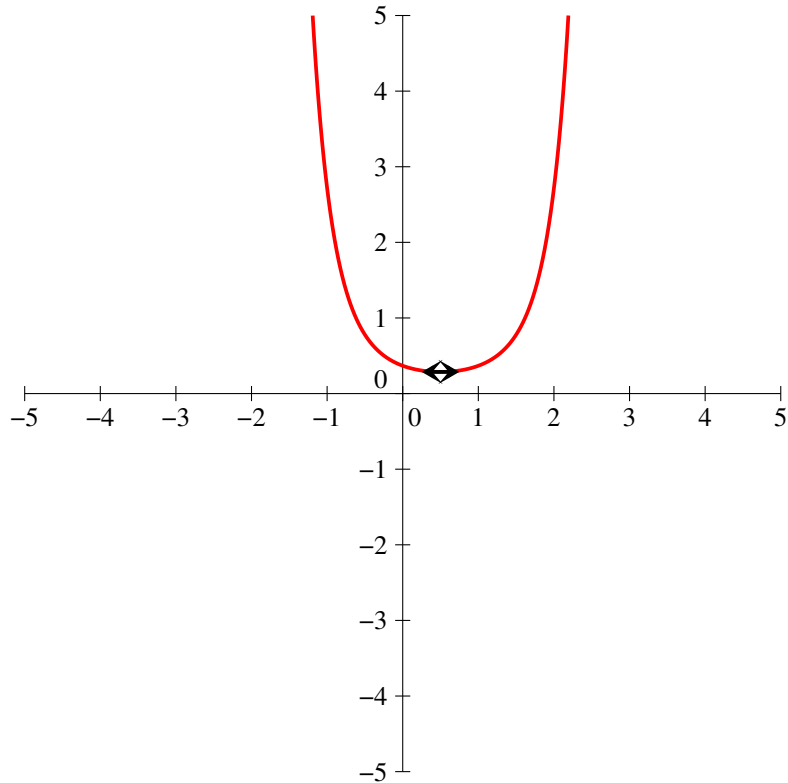
du signe de 1, à savoir positif. La fonction  $f$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$ . Elle a pour dérivée  $f'(x) = \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$ , qui s'annule pour  $x = -\frac{1}{2}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1+x+x^2 = +\infty$ , on a  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ , et de plus  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4$ , d'où le tableau et la courbe suivants :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f$	$+\infty$	$\ln 3 - \ln 4$	$+\infty$



4. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x-1}$ , qui s'annule pour  $x = \frac{1}{2}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - x - 1 = +\infty$ , on a  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ . De plus  $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$ , d'où le tableau et la courbe suivants :

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f$	$+\infty$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$



5. Il faut commencer par déterminer le domaine de définition de  $f$ , et pour cela faire un joli tableau de signes. Le dénominateur a pour discriminant  $\Delta = 16 - 12 = 4$ , et admet donc deux racines réelles  $x_1 = \frac{4+2}{2} = 3$  et  $x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$  (pour le numérateur, la factorisation par  $x$  rend les racines évidentes). D'où le tableau :

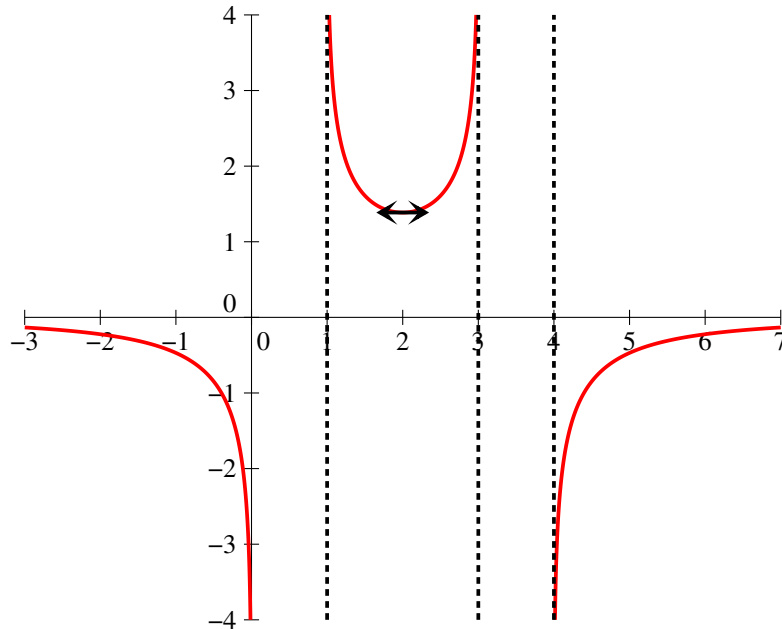
$x$	0	1	3	4			
$x^2 - 4x$	+	0	-	-	0	+	
$x^2 - 4x + 3$	+	+	0	-	0	+	+
$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$	+	0	-	+	-	0	+

On a donc  $\mathcal{D}_f = ]-\infty, 0[ \cup ]1, 3[ \cup ]4, +\infty[$ . Sur cet ensemble,  $f$  a pour dérivée  $f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2-4x+3) - (2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2} \times \frac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \frac{3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} \times \frac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \frac{6(x-2)}{(x^2-4x)(x^2-4x+3)}$ . Le dénominateur étant strictement positif sur  $\mathcal{D}_f$  (c'est un produit au lieu d'un quotient, mais le tableau de signes est exactement celui qu'on a fait ci-dessus),  $f'$  est du signe de  $x-2$ . Par ailleurs,  $f(2) = \ln \frac{-4}{-1} = 2 \ln 2$

Restent quelques limites un peu pénibles à calculer. Les plus faciles sont les limites en 0 et en 4 : quand le numérateur s'annule, le quotient à l'intérieur du  $\ln$  tend vers 0, donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$ . En 1 et 3, c'est à peine plus compliqué : le dénominateur s'annule donc le quotient tend vers  $+\infty$  (ça ne peut pas être  $-\infty$  puisque  $f$  ne serait pas définie si le quotient prenait des valeurs négatives), et on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ . Enfin, vos souvenirs sur le calculs de limites de Terminale devraient vous permettre de vérifier que la limite du quotient en  $\pm\infty$  vaut 1 (on factorise par  $x^2$  en haut et en bas), d'où  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ . Ce qui nous donne un tableau et une courbe ressemblant à ceci :



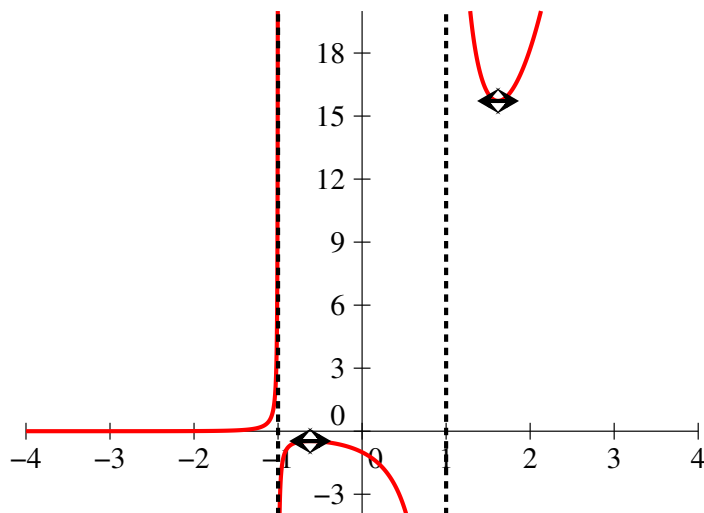
$x$	$-\infty$	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f$	0		$+\infty$	$2 \ln 2$	$+\infty$		0



6. La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ , de dérivée  $f'(x) = \frac{2e^{2x}(x^2 - 1) - 2xe^{2x}}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2 - x - 1)}{(x^2 - x - 1)^2}$ . Cette dérivée est du signe de  $x^2 - x - 1$ , trinôme dont le discriminant vaut  $\Delta = 1 + 4 = 5$ , qui s'annule en deux valeurs  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  (qui est compris entre  $-1$  et  $1$ ) et  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (qui est plus grand que  $1$ ). La fonction  $f$  admet donc un maximum en  $x_1$  et un minimum en  $x_2$ , dont on ne cherchera exceptionnellement pas à expliciter les valeurs car ça ne se simplifie vraiment pas. Par croissance comparée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ; et sans croissance comparée,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ . Comme par ailleurs  $e^{2x}$  est strictement positif, et  $x^2 - 1$  est positif en-dehors de ses racines, on trouve  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ , et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ .

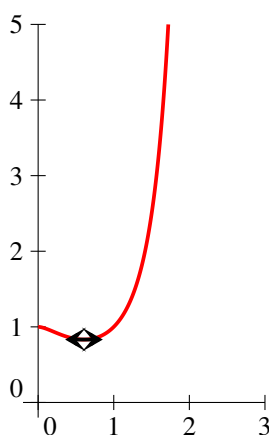
$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$1$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$f$	0	$+\infty$	$f(x_1)$	$-\infty$	$f(x_2)$	$+\infty$

La courbe n'est ici pas très pratique à tracer sur une feuille, le minimum étant à une hauteur assez élevée.

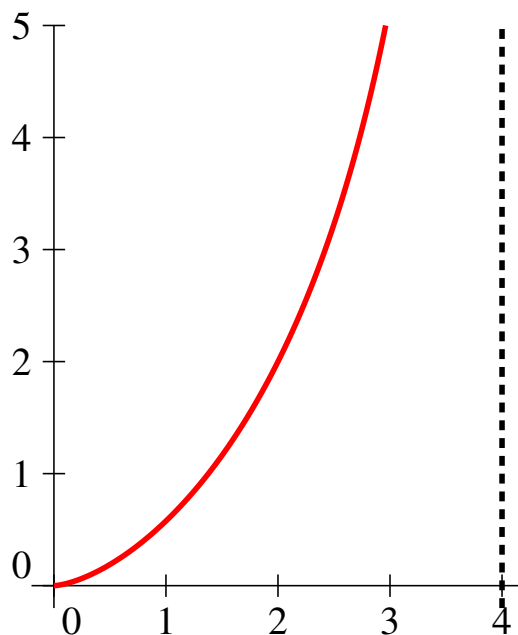


7. Cette fonction est définie sur  $]0, +\infty[$ , et s'écrit sous forme exponentielle  $f(x) = e^{x^2 \ln x}$ . Elle a pour dérivée  $f'(x) = (2x \ln x + x)e^{x^2 \ln x} = x(2 \ln x + 1)e^{x^2 \ln x}$ . Le facteur  $x$  est toujours strictement positif sur  $\mathcal{D}_f$ , seul compte donc le signe de  $2 \ln x + 1$ . Ceci s'annule pour  $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ . Le calcul des limites est extrêmement similaire à celui de la deuxième fonction de l'exercice, au point d'ailleurs que les limites sont les mêmes, on a  $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{1}{2e}}$  et on obtient tableau et courbe :

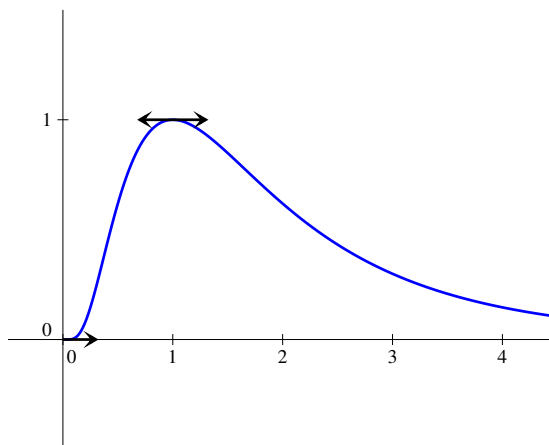
$x$	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f$	1	$e^{-\frac{1}{2e}}$	$+\infty$



8. La fonction  $f$  est définie si  $\frac{x^3}{2a-x} \geq 0$ , soit lorsque  $x \in [0, 2a[$ . La fonction vérifie évidemment  $f(0) = 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow 2a} f(x) = +\infty$ . La fonction racine carrée étant croissante,  $f$  a les mêmes variations que  $x \mapsto \frac{x^3}{2a-x}$ , qui a pour dérivée  $\frac{3x^2(2a-x) + x^3}{(2a-x)^2} = \frac{6ax^2 - 2x^3}{(2a-x)^2} = \frac{2x^2(3a-x)}{(2a-x)^2}$ , toujours positive sur  $[0, 2a[$ . La fonction  $f$  est donc strictement croissante, et on n'a pas grand chose de plus à dire sur cette fonction ! Un exemple de courbe lorsque  $a = 2$  :



9. Comme pour les autres fonctions de ce genre, on commence par écrire sous forme exponentielle  $f(x) = e^{-\ln(x)\ln(x)} = e^{-\ln^2(x)}$ , définie sur  $]0, +\infty[$  (pour une fois, il s'agit vraiment du domaine de définition naturel de la fonction!). Les limites ne posent aucun problème :  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln^2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et  $f'(x) = \left(-\frac{2\ln(x)}{x}\right) e^{-\ln^2(x)}$ , qui est simplement du signe de  $-\ln(x)$ . On aura donc un maximum atteint pour  $x = 1$ , de valeur  $f(1) = e^0 = 1$  (il est normal que la fonction ne prenne que des valeurs dans l'intervalle  $]0, 1[$ , puisque  $-\ln^2(x) \leq 0$ ). On peut directement tracer une allure de courbe (on a indiqué la tangente horizontale en 0 sur la courbe, mais le calcul de la limite de la dérivée en 0 est ici loin d'être évident) :



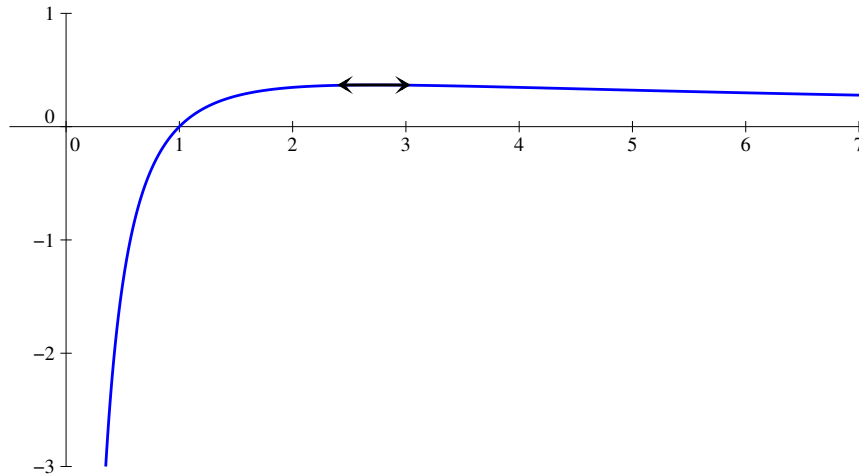
## Exercice 6 (\*\*)

1. La fonction  $f$  est définie (et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur  $]0, +\infty[$ , et  $\forall x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ . La fonction  $f$  est donc croissante sur  $]0, e]$  puis décroissante sur  $[e, +\infty[$ , admettant pour maximum  $f(e) = \frac{1}{e}$ . de plus,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  (pas de forme indéterminée) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(croissance comparée extrêmement classique). On peut ajouter que  $f(1) = 0$ , et dresser le tableau de variations suivant :

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$f$			$\frac{1}{e}$	
		0		0
	$-\infty$			

Et la petite courbe qui va avec :



- Il y a forcément un lien avec la question précédente : en effet,  $a^b = b^a$  revient à dire que  $e^{b \ln(a)} = e^{a \ln(b)}$ , donc  $b \ln(a) = a \ln(b)$  et  $f(a) = f(b)$ . Vu les variations obtenues pour la fonction  $f$ , les entiers  $a$  et  $b$  ne peuvent pas être tous les deux supérieurs à  $e$ , sinon ils appartiendraient à un intervalle sur lequel  $f$  est strictement décroissante donc injective. On a donc nécessairement  $a = 2$ , et il est ensuite facile de vérifier que  $b = 4$  convient, et qu'il est nécessairement le seul à convenir. Seul le couple  $(2, 4)$  est donc solution du problème.
- Même méthode que ci-dessus :  $e^\pi < \pi^e \Leftrightarrow \pi \ln(e) < e \ln(\pi) \Leftrightarrow f(e) < f(\pi)$ , ce qui est manifestement faux. On en déduit que le plus grand des deux est  $e^\pi$  (vous vérifierez à la calculatrice, mais ça se joue à pas grand chose).

## Exercice 7 (\*)

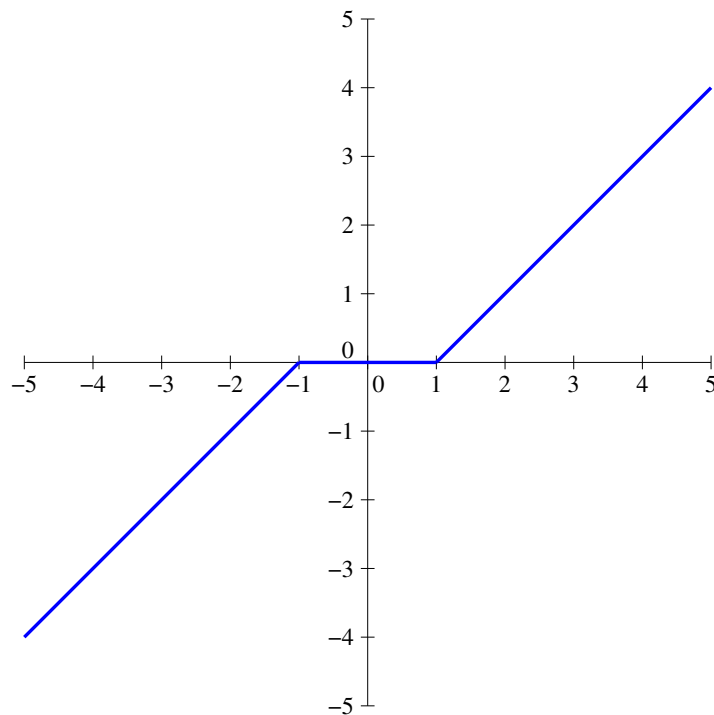
Posons  $y = f(x)$  pour alléger un peu les calculs. On a donc  $f(x+1) = \frac{y-5}{y-3}$ , puis en appliquant la formule à  $x+1$  (qui est un réel comme un autre),  $f(x+2) = \frac{f(x+1)-5}{f(x+1)-3} = \frac{\frac{y-5}{y-3}-5}{\frac{y-5}{y-3}-3} = \frac{y-5-5(y-3)}{y-5-3(y-3)} = \frac{10-4y}{4-2y} = \frac{2y-5}{y-2}$ . Allez, encore un petit tour dans la machine, en appliquant la dernière formule obtenue à  $x+2$  :  $f(x+4) = \frac{2f(x+2)-5}{f(x+2)-2} = \frac{\frac{4y-10}{y-2}-5}{\frac{2y-5}{y-2}-2} = \frac{4y-10-5(y-2)}{2y-5-2(y-2)} = \frac{-y}{-1} = y$ . On vient de prouver que  $f(x+4) = f(x)$ , la fonction  $f$  est donc bien 4-périodique.

## Exercice 8 (\*)

Puisque la condition doit être vérifiée pour tout réel non nul, on a le droit de remplacer  $x$  par  $\frac{1}{x}$  dans la formule pour obtenir  $f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \frac{1}{x^2}$ . En multipliant cette équation par 3 et en lui soustrayant celle de l'énoncé, on obtient alors  $8f(x) = \frac{3}{x^2} - x^2$ , donc  $f(x) = \frac{3}{8x^2} - \frac{x^2}{8}$ . Il n'a donc qu'une seule fonction solution possible. On vérifie aisément qu'elle est bien solution :  $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{8x^2} - \frac{x^2}{8} + \frac{9}{8x^2} - \frac{3}{8x^2} = x^2$ .

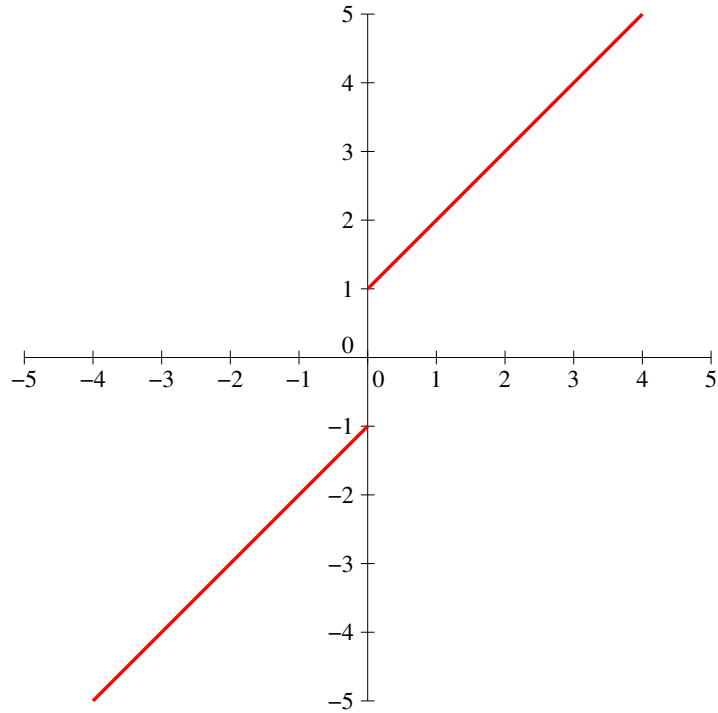
## Exercice 9 (\*\*)

1. La fonction, bien que définie par morceaux, est gentiment continue sur  $\mathbb{R}$  :



2. On peut simplement distinguer trois cas, qui correspondent aux trois morceaux de la courbe précédente :
  - si  $y = 0$ ,  $f$  devient strictement positive à droite de  $x = 1$ , donc  $g(0) = 1$
  - si  $y > 0$ ,  $f(y + 1) = y$  et  $f$  est ensuite strictement croissante, donc  $g(y) = y + 1$  (formule qui est donc également valable pour  $y = 0$ )
  - si  $y < 0$ ,  $f(y - 1) = y$  et  $f$  ne prend des valeurs strictement supérieures à  $y$  qu'après avoir atteint cette valeur  $y - 1$ , donc  $g(y) = y - 1$

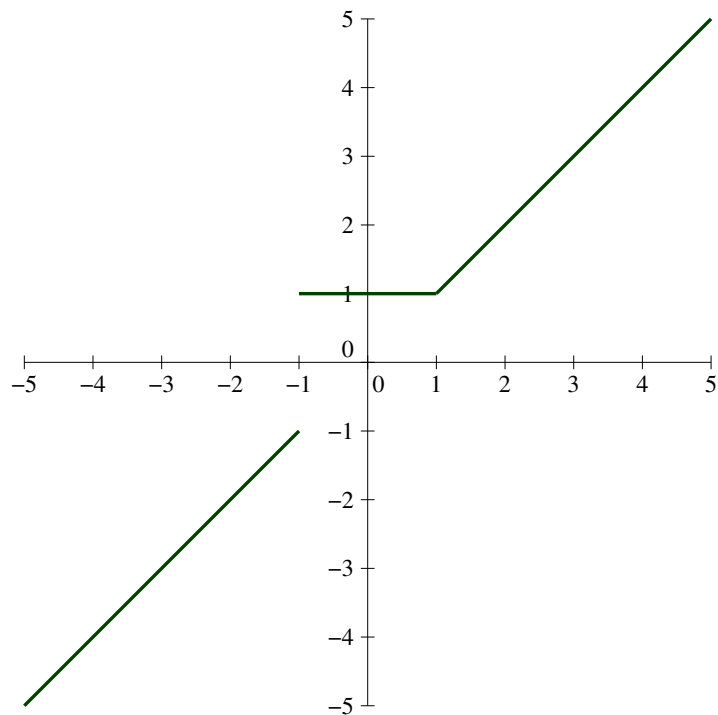
Ce qui donne la courbe passionnante suivante (cette fois-ci, la fonction n'est pas continue) :



3. Commençons par  $g \circ f$ , en distinguant à nouveau trois cas :

- si  $x < -1$ ,  $f(x) = x + 1 < 0$ , donc  $g(f(x)) = f(x) - 1 = x$
- si  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $f(x) = 0$ , donc  $g(f(x)) = 1$
- si  $x > 1$ ,  $f(x) = x - 1 \geq 0$ , donc  $g(f(x)) = f(x) + 1 = x$

D'où la courbe suivante :



Passons enfin à la deuxième composée, en distinguant seulement deux cas :

- si  $x \leq 0$ ,  $g(x) = x - 1 \leq -1$ , donc  $f \circ g(x) = g(x) + 1 = x$
- si  $x \geq 0$ ,  $g(x) = x + 1 \geq 1$ , donc  $f \circ g(x) = g(x) - 1 = x$

Autrement dit, la fonction  $f \circ g$  est simplement la fonction identité, je me permets de me dispenser de la dernière courbe.

### Exercice 10 (\*\*)

- Un calcul brutal devrait fonctionner : 
$$\frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} = \frac{2(e^{2x} + e^{-2x})}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \frac{2(e^{2x} + e^{-2x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^{2x} - e^{-2x})}{(e^{2x} - e^{-2x})(e^x - e^{-x})}$$

$$= \frac{2e^{3x} - 2e^x + 2e^{-x} - 2e^{-3x} - e^{3x} + e^{-x} - e^x + e^{-3x}}{(e^{2x} - e^{-2x})(e^x - e^{-x})} = \frac{e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}}{(e^{2x} - e^{-2x})(e^x - e^{-x})}$$

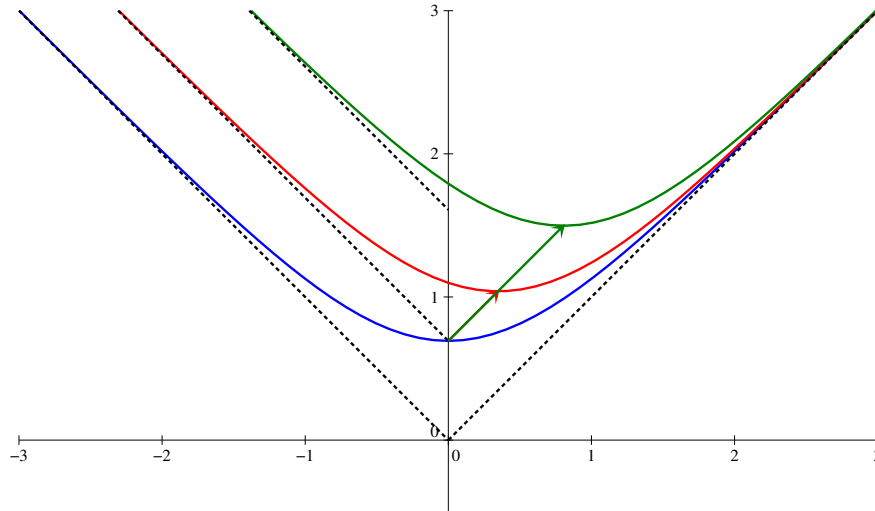
$$= \frac{(e^x - e^{-x})^3}{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th}(x)$$
 (un peu d'identités remarquables en passant pour factoriser numérateur et dénominateur après avoir tout regroupé et développé).
- En utilisant la question précédente, on peut écrire  $E^k \operatorname{th}(2^k x) = \frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)}$ . La somme devient alors télescopique, elle est égale à 
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} = \frac{2^n}{\operatorname{th}(2^n x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$$
. Remarquons en passant que l'énoncé aurait dû exclure la valeur  $x = 0$  pour tous ces calculs.

### Exercice 11 (\*)

- Puisqu'on a supposé  $m > 0$ , ce qui se trouve dans le  $\ln$  est une somme de termes strictement positifs, donc  $\mathcal{D}_{f_m} = \mathbb{R}$ .
- La fonction  $f_m$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $f'_m(x) = \frac{e^x - me^{-x}}{e^x + me^{-x}}$ , dérivée qui est du signe de son numérateur. Ce numérateur est lui-même strictement croissant (différence d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante) et s'annule lorsque  $e^x = me^{-x}$ , soit  $e^{2x} = m$ , donc  $x = \frac{1}{2} \ln(m)$ . La fonction  $f_m$  est donc décroissante sur  $\left] -\infty, \frac{1}{2} \ln(m) \right]$  et croissante sur  $\left[ \frac{1}{2} \ln(m), +\infty \right[$ . On peut calculer la valeur du minimum si on est un peu courageux : 
$$f_m\left(\frac{1}{2} \ln(m)\right) = f_m(\ln(\sqrt{m})) = \ln\left(\sqrt{m} + \frac{m}{\sqrt{m}}\right) = \ln(2\sqrt{m}).$$

Pour le calcul des limites, le mieux est de déterminer directement les asymptotes en effectuant une (ou plutôt deux) factorisations dans le  $\ln$ . On peut en effet écrire  $f_m(x) = \ln(e^x(1 + me^{-2x})) = x + \ln(1 + me^{-2x})$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + me^{-2x}) = 0$ , cette première écriture prouve que la droite d'équation  $y = x$  est asymptote à toutes les courbes représentatives des fonctions  $f_m$ . De façon similaire,  $f_m(x) = \ln(e^{-x}(m + e^{2x})) = -x + \ln(m) + \ln\left(1 + \frac{e^{2x}}{m}\right)$ , ce qui prouve cette fois que la droite d'équation  $y = -x + \ln(m)$  est asymptote à la courbe du côté de  $-\infty$ .
- Notons déjà que  $f_1(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ , fonction pour laquelle la minimum se situe quand  $x = 0$ . Il va donc falloir faire apparaître un décalage de  $\frac{1}{2} \ln(m)$  quelque part, ce qui se fait avec un petit peu d'astuce : 
$$f_m(x) = \ln\left(\sqrt{m}\left(\frac{e^x}{\sqrt{m}} + \sqrt{m}e^{-x}\right)\right) = \frac{1}{2} \ln(m) + \ln\left(e^{x - \frac{1}{2} \ln(m)} + e^{-x + \frac{1}{2} \ln(m)}\right)$$

$e^{-x+\frac{1}{2}\ln(m)} = \frac{1}{2}\ln(m) + f_1\left(x - \frac{1}{2}\ln(m)\right)$ . La courbe est donc obtenue en effectuant à la fois une translation de vecteur  $\frac{1}{2}\ln(m)\vec{i}$  et une translation de vecteur  $\frac{1}{2}\ln(m)\vec{j}$ , donc une seule translation de vecteur  $\frac{1}{2}\ln(m)(\vec{i} + \vec{j})$ . Ci-dessous, une illustration avec la courbe  $\mathcal{C}_1$  en bleu, la courbe  $\mathcal{C}_2$  en rouge et la courbe  $\mathcal{C}_3$  en vert (les vecteurs de translation sont indiqués au niveau des minimums, les asymptotes en pointillés noirs) :



## Exercice 12 (\*\*)

1. La fonction  $f$  est bien sûr définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . De façon évidente,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Et comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(x) = 0$  (croissance comparée), on a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(2)$ .
2. La fonction  $f$  est dérivable sur son domaine de définition, et  $f'(x) = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}$ . Le signe de  $f'(x)$  est le même que celui de  $\ln(x) + 2$ , la dérivée s'annule en particulier pour  $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ . Après avoir calculé  $f(e^{-2}) = \frac{1}{e} \times (-2) + \ln(2) = \ln(2) - \frac{2}{e}$ , on obtient le tableau de variations suivant :

$x$	0	$e^{-2}$	$+\infty$
$f$	$\ln(2)$	$\ln(2) - \frac{2}{e}$	$+\infty$

3. D'après le tableau de variations,  $f$  est bijective de  $]0, e^{-2}]$  vers  $\left[\ln(2) - \frac{2}{e}, \ln(2)\right]$ , et elle l'est aussi de  $[e^{-2}, +\infty[$  vers  $\left[\ln(2) - \frac{2}{e}, +\infty\right[$ . Or,  $\ln(2) - \frac{2}{e} \simeq -0.03 < 0$ , ce qui prouve l'existence d'une unique solution à l'équation  $f(x) = 0$  sur chacun des deux intervalles où  $f$  est bijective. Il y a donc deux solutions à l'équation.
4. (a) On calcule  $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln(2) = -\frac{2\ln(n)}{n} + \ln(2)$ . Cette expression s'annule si  $2\ln(n) = n \ln(2)$ , soit en passant tout à l'exponentielle  $n^2 = 2^n$ .
- (b) Le nombre  $2^n$  étant pair,  $n^2$  est pair, et  $n$  aussi (le carré d'un nombre entier a toujours la même parité que le nombre lui-même). On peut donc poser  $n = 2p$  pour trouver la



condition équivalente  $(2p)^2 = 2^{2p}$ , soit  $4p^2 = 2^{2p}$ , ou encore  $p^2 = 2^{2p-2} = (2^{p-1})^2$ , ce qui implique bien  $p = 2^{p-1}$  (tous ces nombres sont positifs).

(c) L'égalité précédente est manifestement vérifiée lorsque  $p = 1$  (puisque  $2^0 = 1$ ) et lorsque  $p = 2$  (puisque  $2^1 = 2$ ), ce qui correspond aux deux solutions suivantes de l'équation  $f(x) = 0 : x = \frac{1}{(2 \times 1)^2} = \frac{1}{4}$ , et  $x = \frac{1}{(2 \times 2)^2} = \frac{1}{16}$ . Ce sont évidemment les seules solutions de cette équation, puisqu'on sait qu'elle n'en possède que deux.

5. Il ne reste plus qu'à faire le lien avec l'équation de départ : pour un  $x$  nécessairement positif,  $x\sqrt{x} = \frac{1}{2}$  donne, en passant tout au  $\ln$ , l'équation équivalente  $\sqrt{x} \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ , soit  $f(x) = 0$ . Les solutions de l'équation (E) sont donc les deux réels  $x = \frac{1}{4}$  et  $x = \frac{1}{16}$ .

### Exercice 13 (\*\*)

1. Le dénominateur de  $f$  ne s'annulant jamais (puisque  $e^x + 1$  est toujours strictement positif),  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .

2. Comme  $f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = f(x)$ , la fonction  $f$  est paire.

3. Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , le numérateur de  $f$  tend vers 0 et son dénominateur vers 1, donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . La fonction étant paire, on aura aussi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  (ce qu'on peut retrouver par un calcul direct, par exemple en développant le dénominateur et en factorisant tout par  $e^x$ ).

4. Calculons donc :  $f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$ . Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, le signe du numérateur dépend uniquement de celui de  $1 - e^x$ , qui est positif quand  $e^x \leq 1$ , c'est-à-dire quand  $x \leq 0$ . D'où le tableau de variations suivant ( $f(0) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$ ) :

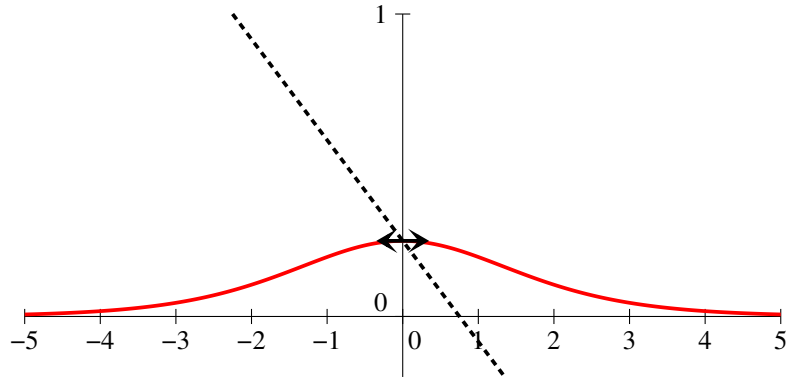
$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f$	0	$\frac{1}{4}$	0

5. Puisque  $e^{\ln 2} = 2$ , on a  $f(\ln 2) = \frac{2}{(1+2)^2} = \frac{2}{9}$ , et  $f'(\ln 2) = \frac{2(1-2)}{(1+2)^3} = -\frac{2}{27}$ . L'équation de la tangente est donc  $y = -\frac{2}{27}(x - \ln 2) + \frac{2}{9} = -\frac{2}{27}x + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{\ln 2}{3}\right)$ .

6. Le fait que  $f'(x)$  soit négatif sur cet intervalle a déjà été vu. De plus,  $f'(x) + \frac{1}{3} = \frac{3e^x(1-e^x) + (1+e^x)^3}{(1+e^x)^3} = \frac{3e^x - 3e^{2x} + 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}}{(1+e^x)^3} = \frac{1 + 6e^x + e^{3x}}{(1+e^x)^3} \geq 0$ , d'où la deuxième inégalité demandée.

7. Posons  $a(x) = f(x) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$ . Comme  $a'(x) = f'(x) + \frac{1}{3} \geq 0$ , la fonction  $a$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ . Or,  $a(0) = f(0) - \frac{1}{4} = 0$ , donc la fonction  $a$  prend des valeurs positives sur  $[0, +\infty[$ , ce qui revient à ce qu'on voulait prouver.

8. Voici les courbes, avec la droite en pointillés :



### Exercice 14 (\*\*)

1. Pour que  $f$  soit définie, on doit avoir  $x > 0$  et  $1-x > 0$ , d'où  $\mathcal{D}_f = ]0, 1[$ . On a de façon évidente  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x) \ln(1-x) = 0$ , et par croissance comparée  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . De même,  $\lim_{x \rightarrow 1} x \ln(x) = 0$  (pas de forme indéterminée) et  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \ln(1-x) = 0$  par croissance comparée (mais oui, en posant  $X = 1-x$ , on se ramène tout simplement à  $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln(X)$ ), donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

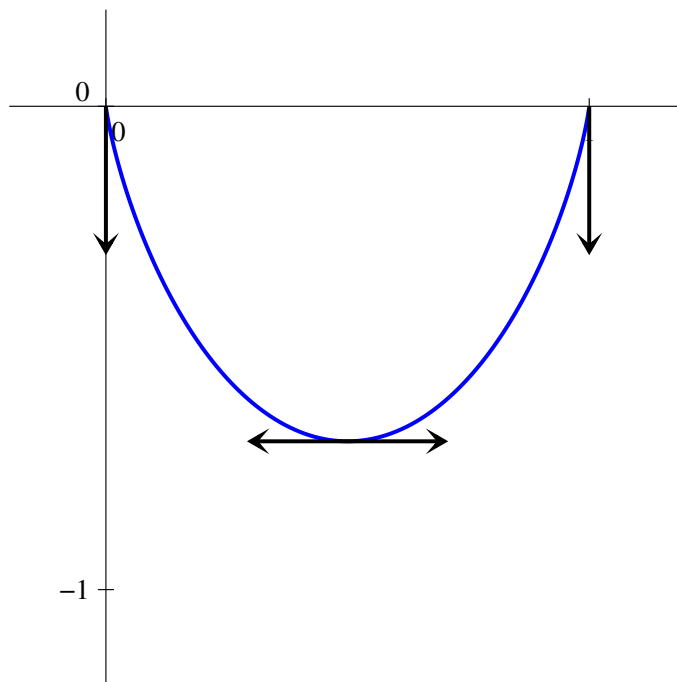
2. Il s'agit de la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$ .

3. Contentons-nous simplement de calculer la dérivée :  $f'(x) = \ln(x) + 1 - \ln(1-x) - \frac{1-x}{1-x} = \ln(x) - \ln(1-x)$  (on peut regrouper sous la forme d'un seul  $\ln$  de quotient, mais ça n'a aucun intérêt). Par croissance de la fonction  $\ln$ , cette dérivée est positive si  $x \geq 1-x$ , donc si  $x \geq \frac{1}{2}$ . La fonction  $f$  admettra en particulier un minimum en  $\frac{1}{2}$ , de valeur  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ . On peut dresser le tableau de variations suivant :

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f$	0	$-\ln(2)$	0

4. Aucune forme indéterminée, on obtient directement  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = +\infty$ . La courbe  $\mathcal{C}_f$  va donc devenir « de plus en plus verticale » aux bords de l'intervalle  $]0, 1[$  (en fait, en effectuant deux prolongements pas continuité en 0 et en 1, on prouverait qu'il y a des deux côtés des tangentes verticales à la courbe).

5. Pas grand chose de très passionnant à indiquer sur cette courbe :



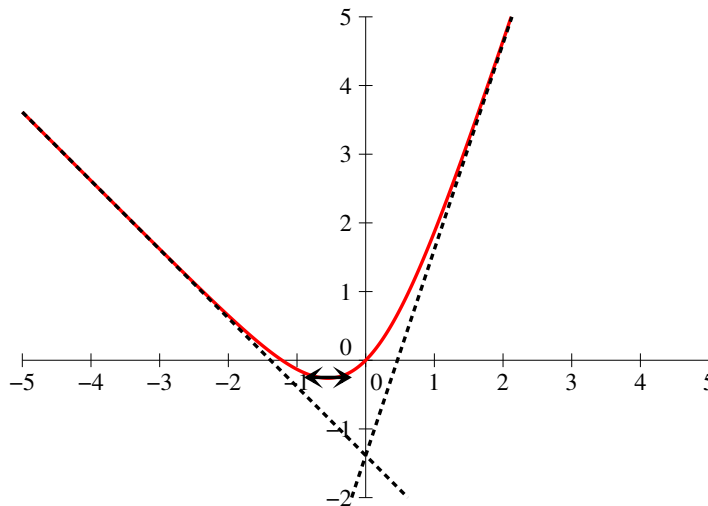
6. Il suffit d'écrire cette expression sous forme exponentielle  $e^{x \ln(x)} e^{(1-x) \ln(1-x)} = e^{f(x)}$  pour constater (la fonction exponentielle étant strictement croissante) que son minimum sur  $]0, 1[$  est atteint au même endroit que celui de  $f$ , donc quand  $x = \frac{1}{2}$ , et a pour valeur  $e^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 15 (\*\*)

1. La fonction  $f$  est définie lorsque  $\text{ch}(x) > 0$ , c'est-à-dire tout le temps, donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .
2. Calculons donc :  $f(0) = 0 + 2 \ln(1) = 0$  ;  $f(\ln(2)) = \ln(2) + 2 \ln\left(\frac{2 + \frac{1}{2}}{2}\right) = \ln(2) + 2 \ln(5) - 2 \ln(4) = 2 \ln(5) - 3 \ln(2)$  ; et enfin  $f(-\ln(3)) = -\ln(3) + 2 \ln\left(\frac{\frac{1}{3} + 3}{2}\right) = -\ln(3) + 2 \ln(5) - 2 \ln(3) = 2 \ln(5) - 3 \ln(3)$ .
3. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $f'(x) = 1 + 2 \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = 1 + \frac{2e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{3e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . Cette dérivée est du signe de  $3e^x - e^{-x} = e^{-x}(3e^{2x} - 1)$ . Elle s'annule lorsque  $e^{2x} = \frac{1}{3}$ , soit  $2x = -\ln(3)$ , donc  $x = -\frac{1}{2} \ln(3)$ . La dérivée est négative avant cette valeur d'annulation, positive après. De plus,  $e^{-\frac{1}{2} \ln(3)} = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , et  $e^{\frac{1}{2} \ln(3)} = \sqrt{3}$ , donc le minimum de notre fonction vaut  $f\left(-\frac{1}{2} \ln(3)\right) = -\frac{1}{2} \ln(3) + 2 \ln\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln(3) + 2 \ln\left(\frac{4}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2} \ln(3) + 2 \ln(2) - 2 \ln(\sqrt{3}) = 2 \ln(2) - \frac{3}{2} \ln(3) \simeq -0.25$ . On peut alors dresser le tableau de variations suivant (en ajoutant dedans les calculs de limites effectués ensuite) :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2} \ln(3)$	$+\infty$
$f$	$+\infty$	$2\ln(2) - \frac{3}{2} \ln(3)$	$+\infty$

4. On peut écrire  $\text{ch}(x) = \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{2}$  et en déduire que  $f(x) = x + 2\ln\left(\frac{e^x(1 + e^{-2x})}{2}\right) = x + 2x + 2\ln(1 + e^{-2x}) - 2\ln(2)$ , ce qui correspond exactement à la formule de l'énoncé. Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0$  (pas de forme indéterminée ici), on en déduit facilement, d'une part que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , et d'autre part que la droite d'équation  $y = 3x - 2\ln(2)$  est asymptote oblique à la courbe (puisque l'écart entre  $f(x)$  et cette valeur tend vers 0). La position relative est donnée par le signe de  $\ln(1 + e^{-2x})$ . Or,  $e^{-2x}$  étant toujours positif, ce nombre est lui-même toujours positif : la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.
5. C'est extrêmement similaire :  $\text{ch}(x) = \frac{e^{-x}(1 + 2e^x)}{2}$ , puis  $f(x) = -x + 2\ln(1 + e^{2x}) - 2\ln(2)$ . Les conclusions sont également très proches :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , et la droite d'équation  $y = -x - 2\ln(2)$  est asymptote oblique à la courbe, cette dernière étant toujours située au-dessus de son (autre) asymptote.
6. Eh bien, une petite courbe pour finir :



## Exercice 16 (\*\*)

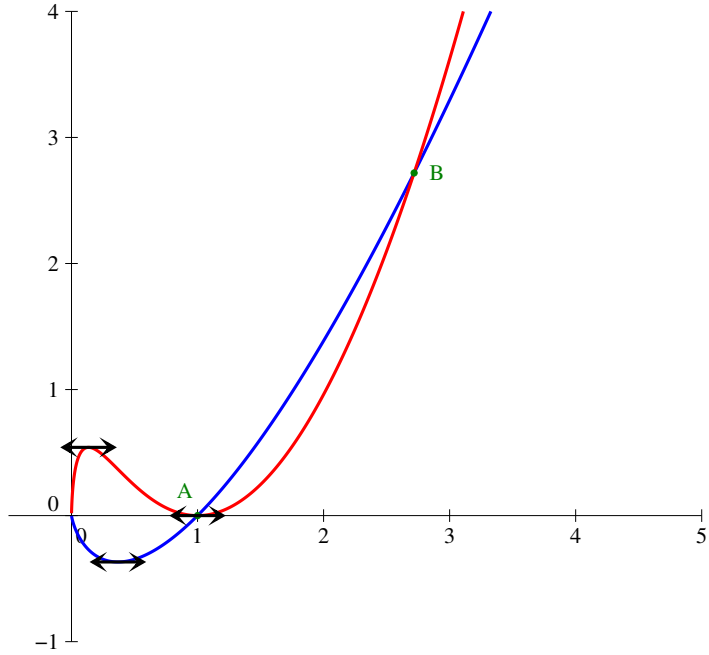
- On a bien entendu  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$  (pas de forme indéterminée ici), et il suffit d'invoquer les résultats de croissance comparée du cours pour affirmer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$ .
- La fonction  $f_1 : x \mapsto x \ln(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , de dérivée  $f_1'(x) = \ln(x) + 1$ . Cette dérivée s'annule en  $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ , et la fonction  $f_1$  y admet un minimum de valeur  $f_1\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-1) = -\frac{1}{e}$ . On peut donc dresser le tableau suivant pour la fonction  $f_1$  :

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f_1'(x)$	-	$\emptyset$	+
$f_1$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

Passons à  $f_2 : x \mapsto x \ln^2(x)$ . Cette fonction est également dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , de dérivée  $f_2'(x) = \ln^2(x) + x \times \frac{2 \ln(x)}{x} = \ln(x)(\ln(x) + 2)$ . Cette dérivée va donc s'annuler en  $x = 1$  et en  $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ . Calculons  $f_2(1) = 0$  et  $f_2\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}$  avant de dresser un tableau de variations complet :

$x$	0	$\frac{1}{e^2}$	1	$+\infty$	
$f_2'(x)$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+
$f_2$	0	$\frac{4}{e^2}$	0	$+\infty$	

- Réolvons donc :  $x \ln(x) = x \ln^2(x)$  se produit lorsque  $x = 0$  (valeur n'appartenant pas à notre domaine de définition),  $\ln(x) = 0$  ou  $\ln(x) = 1$ , ce qui donne deux solutions :  $x = 1$  et  $x = e$ . Comme  $f_2(x) - f_1(x) = x \ln(x)(\ln(x) - 1)$ , qui est du signe de  $\ln(x)(\ln(x) - 1)$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , la courbe  $\mathcal{C}_1$  sera en-dessous de  $\mathcal{C}_2$  sur l'intervalle  $[1, e]$ , et au-dessus sur  $]0, 1]$  et sur  $[e, +\infty[$ . Plus généralement, on aura toujours  $f_n(1) = 0$  et  $f_n(e) = e$ , ce qui prouve que toutes les courbes passent par les deux points  $A(1, 0)$  et  $B(e, e)$ .
- C'est le même raisonnement que ci-dessus : on calcule  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x \ln^n(x)(\ln(x) - 1)$ . Lorsque  $n$  est un entier pair, cette différence est du signe de  $\ln(x) - 1$ , donc  $\mathcal{C}_{n+1}$  sera en-dessous de  $\mathcal{C}_n$  sur  $]0, e]$  et au-dessus sur  $[e, +\infty[$ . Quand  $n$  est un entier impair, il y a un changement de signe supplémentaire quand  $x = 1$  (puisque  $\ln^n(x)$  y change alors de signe), donc  $\mathcal{C}_{n+1}$  est en-dessous de  $\mathcal{C}_n$  seulement sur l'intervalle  $[1, e]$ , et au-dessus sur  $]0, 1]$  et sur  $[e, +\infty[$  dans ce cas.
- Toutes les courbes correspondant à des valeurs paires de  $n$  seront situées au-dessus de l'axe des abscisses sur  $]0, 1[$ , et celles correspondant à des valeurs impaires de  $n$  seront en-dessous. La seule chose à comparer est donc la position des courbes « paires » (entre elles) et celle des courbes « impaires ». Pour cela, on peut calculer  $f_{n+2}(x) - f_n(x) = x \ln^n(x)(\ln^2(x) - 1)$ . Le facteur  $x \ln^n(x)$  est de signe constant sur  $]0, 1[$  (positif si  $n$  est pair, négatif si  $n$  est impair), et  $\ln^2(x) - 1$  change de signe lorsque  $\ln(x) = -1$  (et aussi lorsque  $\ln(x) = 1$  bien entendu, mais c'est en-dehors de notre intervalle d'étude), soit lorsque  $x = \frac{1}{e}$ . Ce facteur est positif sur  $\left]0, \frac{1}{e}\right[$  et négatif sur  $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$ . On en déduit que les courbes « paires » sont « de plus en plus haut » (la courbe  $\mathcal{C}_{2p}$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_{2p}$  si  $k > p$  sur  $\left]0, \frac{1}{e}\right[$  et « de plus en plus bas » sur  $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$ . C'est le contraire pour les courbes « impaires ».
- Voici les courbes,  $\mathcal{C}_1$  en bleu,  $\mathcal{C}_2$  en rouge :



7. Dérivons donc la fonction  $f_n : f'_n(x) = \ln^n(x) + x \times \frac{n \ln^{n-1}(x)}{x} = \ln^{n-1}(x)(\ln(x) + n)$ . Cette dérivée s'annule en  $x = 1$  et lorsque  $\ln(x) = -n$ , soit  $x = \frac{1}{e^n}$ . On calcule donc  $f_n\left(\frac{1}{e^n}\right) = \frac{1}{e^n} \times (-n)^n = \left(-\frac{n}{e}\right)^n$ . On obtient le tableau de variations suivant lorsque  $n$  est pair (et donc que  $\ln^{n-1}(x)$  est toujours positif) :

$x$	0	$\frac{1}{e^n}$	$+\infty$
$f'_1(x)$	-	0	+
$f_1$	0	$-\frac{n^n}{e^n}$	$+\infty$

Et le tableau suivant lorsque  $n$  est pair :

$x$	0	1	$\frac{1}{e^n}$	$+\infty$	
$f'_2(x)$	+	0	-	0	+
$f_2$	0	$\frac{n^n}{e^n}$	0	$+\infty$	

### Exercice 17 (\*\*\*)

- La seule chose pouvant poser problème est de qui se trouve dans le  $\ln$ ,  $f$  est donc définie en  $x$  si  $\frac{x+2}{x} > 0$ , donc  $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$  (normalement, pas besoin d'écrire un tableau de signes pour un cas aussi simple).
- (a) Lorsque  $x > 0$ , on peut écrire  $f(x) = x \ln(x+2) - x \ln(x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ . Les résultats classiques de croissance comparée nous permettent d'affirmer que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$  et le reste ne pose

aucun problème, donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$ .

(b) Lorsque  $x > 0$ , on a  $\ln(x+2) > \ln(x)$  (puisque la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ), donc  $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) > 0$  et  $f(x) > \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ , ce qui suffit bien entendu à affirmer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Pour répondre tout à fait complètement à la question, on peut signaler que, sur  $] -\infty, -2[$ , on peut écrire  $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = x \ln(-x-2) - x \ln(-x)$ , et on en déduit que  $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) > 0$  comme précédemment.

(c) Posons donc  $x = \frac{2}{u}$ , on a alors (en multipliant numérateur et dénominateur par  $u$ )  $\frac{x+2}{x} = \frac{2+2u}{2} = 1+u$ , donc  $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2 \frac{\ln(1+u)}{u}$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$  (limite classique vue en cours). La limite demandée dans l'énoncé en découle immédiatement, et on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = 2$ , ou encore que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{x}{4} - \frac{5}{2} = 0$ , ce qui prouve que la droite d'équation  $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$  est asymptote oblique à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ . Elle l'est d'ailleurs également en  $-\infty$  puisque le même calcul reste valable.

3. (a) Commençons par remarquer qu'en posant  $h(x) = \frac{x+2}{x}$ , on aura  $h'(x) = \frac{x-(x+2)}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$ . On en déduit que  $f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + x \times \frac{-2}{x^2} \times \frac{x}{x+2} + \frac{1}{4} = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$ . Autrement dit, on aura  $g(x) = f'(x)$  partout où  $g$  est définie, autrement dit sur  $\mathbb{R}^{+*}$  (alors que  $f'$  est quant à elle définie également sur  $] -\infty, -2[$ ).

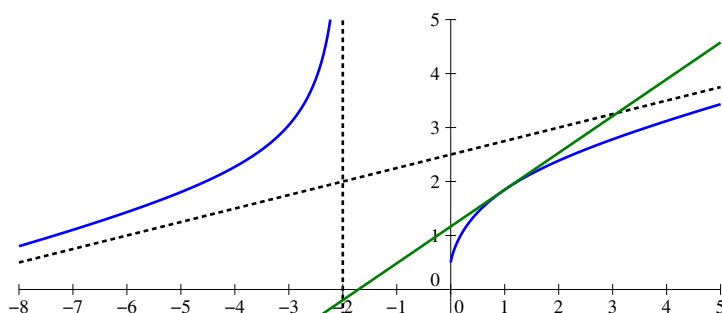
(b) Dérivons donc  $g$  :  $g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2}$   
 $= \frac{x(x+2) - (x+2)^2 + 2x}{x(x+2)^2} = \frac{x^2 + 2x - x^2 - 4x - 4 + 2x}{x(x+2)^2} = -\frac{4}{x(x+2)^2}$ , expression strictement négative sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . La fonction  $g$  est donc strictement décroissante. De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$  (pas de forme indéterminée, donc aucune difficulté) et on peut écrire  $g(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$  pour se convaincre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{4}$ .

(c) En effet,  $g$  est bijective de  $]0, +\infty[$  vers  $\left] \frac{1}{4}, +\infty \right[$ , et en particulier strictement positive. On en déduit que  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . Reste à gérer l'intervalle  $] -\infty, 2[$ , sur lequel on peut écrire  $f'(x) = \ln(-x-2) - \ln(-x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$ . Cette expression a exactement la même dérivée que la fonction  $g$  étudiée à la question précédente, on a donc toujours  $f''(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$ , ce qui prouve que  $f'$  est strictement croissante sur  $] -\infty, -2[$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \frac{1}{4}$  (même calcul sans difficulté qu'en  $+\infty$ ), donc  $f'$  est strictement positive sur  $] -\infty, -2[$ . Il ne reste plus qu'à calculer les limites manquantes pour  $f$  pour pouvoir dresser un tableau de variations complet :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  à cause de la présence de l'asymptote oblique déjà signalée, et  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{x} = +\infty$ , donc

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ . Le tableau complet :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$f$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

4. On calcule donc  $f(1) = \ln(3) + \frac{3}{4}$  et  $f'(1) = \ln(3) - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \ln(3) - \frac{5}{12}$ . La tangente recherchée a donc pour équation  $y = \left(\ln(3) - \frac{5}{12}\right)(x-1) + \ln(3) + \frac{3}{4} = \left(\ln(3) + \frac{5}{12}\right)x + \frac{7}{6}$ . Le coefficient directeur de la tangente est donc  $\ln(3) - \frac{5}{12} \simeq 1.1 - 0.4 \simeq 0.7$ , et son ordonnée à l'origine  $\frac{7}{6} \simeq 1.2$ .
5. Voici la courbe demandée (en bleu, avec la tangente de la question précédente en vert) :



## Exercice 18 (\*\*)

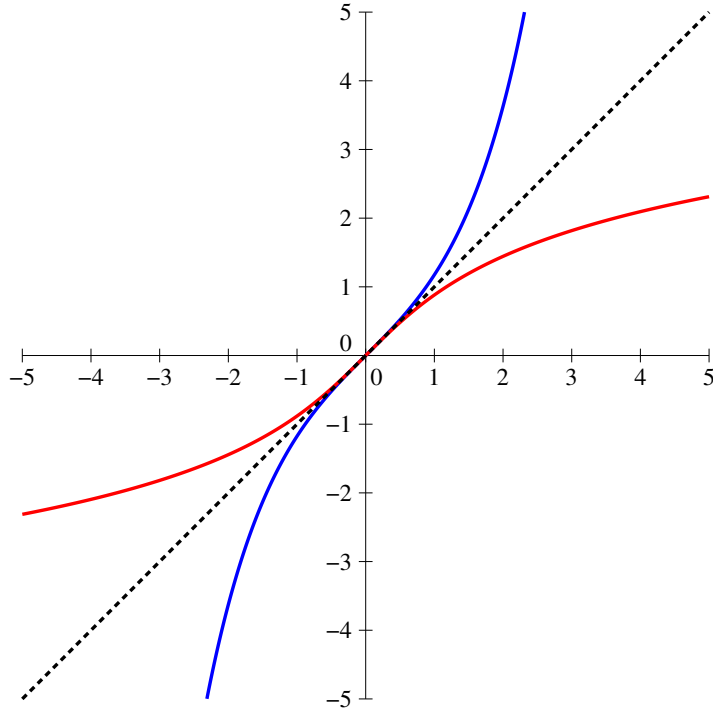
Pour gagner un tout petit de temps, on utilisera les « formules »  $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$  et  $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x}$ , qui découlent immédiatement de la définition des fonction hyperboliques.

- Des formules précédentes, on peut déduire que  $\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y))$ . De la même façon, on obtiendrait  $\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(y))$ . En développant tout brutalement,  $\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$ , et  $\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$ . En faisant la somme des deux équations et en divisant par 2, on obtient alors  $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$ .
- On reprend les calculs ci-dessus, mais cette fois on fait la différence des deux équations avant de diviser par 2 pour trouver  $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)$ .
- On divise les deux formules, puis on divise tout en haut et en bas par  $\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)$ , ce qui donne  $\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)}{\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)} = \frac{\operatorname{th}(y) + \operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$ .

## Exercice 19 (\*\*\*)

- La fonction  $\operatorname{sh}$  étant par continue et strictement croissante, le théorème de la bijection nous assure qu'elle est bijective. Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$ , la fonction  $\operatorname{sh}$  est tout simplement bijective de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . Toujours en utilisant le théorème de la bijection,  $\operatorname{Argsh}$  aura « le même » tableau de variations que  $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , avec des limites respectivement égales à  $-\infty$  et  $+\infty$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . Les courbes exactes des deux fonctions ressemblent à ceci (courbe de  $\operatorname{sh}$  en bleu, courbe de  $\operatorname{Argsh}$  en rouge, axe de symétrie d'équation  $y = x$  en pointillés noirs) :





2. Il s'agit donc (quitte à multiplier par 2) de résoudre l'équation  $e^x - e^{-x} = 2$ . Multiplions également par  $e^x$  tant qu'on y est (qui est strictement positif) pour obtenir l'équation équivalente  $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ . Il ne reste plus qu'à poser  $X = e^x$  pour se ramener à l'équation du second degré  $X^2 - 2X - 1 = 0$ , qui a pour discriminant  $\Delta = 8$ , et admet donc deux racines réelles  $X_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ , et  $X_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ . La première racine obtenue est strictement négative et ne correspond donc à aucune valeur possible pour  $x$ . Notre équation admet donc une solution unique (heureusement vu la bijectivité de sh) égale à  $\ln(X_2) = \ln(1 + \sqrt{2})$ .
3. On fait exactement comme précédemment :  $e^x - e^{-x} = 2y$ , donc après changement de variable  $X^2 - 2yX - 1 = 0$ . Cette équation a pour discriminant  $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2 + 1)$ , qui est manifestement toujours positif, et admet pour solutions  $X_1 = \frac{2y - 2\sqrt{1 + y^2}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}$ , et  $X_2 = y + \sqrt{y^2 + 1}$ . La première solution est toujours strictement négative (car  $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = |y|$ , donc  $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$  quel que soit le signe de  $y$ ), on ne trouve donc qu'une seule solution à notre équation :  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ .
4. Par définition de ce qu'est une réciproque, on a  $y = \text{sh}(x) \Leftrightarrow x = \text{Argsh}(y)$ , donc la question précédente prouve que  $\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .
5. Posons  $u(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$  et commençons par calculer  $u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .  
On en déduit que  $\text{Argsh}'(y) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .
6. La formule vue en cours affirme que  $\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(\text{Argsh}(x))} = \frac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}(x))}$ . Or, on sait que  $\text{ch}^2(\text{Argsh}(x)) = 1 + \text{sh}^2(\text{Argsh}(x)) = 1 + x^2$  puisque les fonctions Argsh et sh sont réciproques l'une de l'autre. La fonction ch étant à valeurs positives, on peut en déduire que  $\text{ch}(\text{Argsh}(y)) = \sqrt{1 + y^2}$ , et on retrouve bien la formule précédente.
7. Pour que la fonction ch devienne injective, il faut la restreindre à  $[0, +\infty[$ . Cette restriction étant strictement croissante, elle sera alors bijective de  $\mathbb{R}^+$  vers  $[1, +\infty[$ . Pour obtenir une expression de la réciproque (qui sera donc définie sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ , à valeurs positives), on doit résoudre l'équation  $\text{ch}(x) = y$ , soit  $e^x + e^{-x} = 2y$ . Comme tout à l'heure, on multiplie

tout par  $e^x$  puis on pose  $X = e^x$  pour obtenir l'équation  $X^2 - 2yX + 1 = 0$ . Le discriminant  $\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$  est positif lorsque  $y \geq 1$  (condition imposée par le domaine de définition de la réciproque), et l'équation admet alors pour solutions  $X_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1}$  et  $X_2 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1}$ . On ne conserve que la deuxième solution (la plus grande des deux), qui est la seule à être plus grande que 1 et donc à avoir un ln positif. On en déduit que  $\text{Argch}(y) = \ln(X_2) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ .

8. Le premier qui serait tenté de prétendre qu'il suffit de faire le quotient des formules obtenues pour  $\text{Argsh}$  et  $\text{Argch}$  n'a pas bien compris la notion de réciproque. Commençons par noter que la fonction  $\text{th}$  est continue et strictement croissante, donc bijective de  $\mathbb{R}$  vers son intervalle image  $] - 1, 1[$ . Sa réciproque sera donc définie sur  $] - 1, 1[$ , et on va l'obtenir comme les précédentes, en partant de l'équation  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$ , qu'on peut mettre sous la forme  $e^x - e^{-x} = ye^x + ye^{-x}$ , soit  $e^x(1 - y) = e^{-x}(1 + y)$ , ou encore  $e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y}$ . Même pas besoin de poser un changement de variable cette fois-ci, on se contente de passer au ln, ce qu'on a le droit de faire uniquement si  $\frac{1 + y}{1 - y} > 0$ , donc si  $y \in ] - 1, 1[$ . Ça tombe bien, c'est justement la condition imposée par l'intervalle de définition de notre réciproque. On obtient alors  $2x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$ , soit  $x = \frac{1}{2}(\ln(1 + y) - \ln(1 - y))$ . On peut désormais conclure : la réciproque de  $\text{th}$  est la fonction définie sur l'intervalle  $] - 1, 1[$  par  $\text{Argth}(x) = \frac{1}{2}(\ln(1 + x) - \ln(1 - x))$ . En particulier, sa dérivée est  $\text{Argth}'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{1 - x^2}$ . En fait, c'est tout à fait normal : comme  $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$ , la formule de dérivation de la réciproque assure que  $\text{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{Argth}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$ .

Le calcul d'intégrale demandé est un piège immonde puisqu'on ne peut pas utiliser la fonction  $\text{Argth}$  (on est en-dehors de son intervalle de définition). En fait, ça n'a pas d'importance, on peut garder la formule explicite « avec des ln » pour obtenir une primitive, en changeant simplement un signe pour avoir une fonction définie sur l'intervalle  $[2, 3]$  : en posant  $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1 + x) - \ln(x - 1))$ , on aura toujours  $f'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$ , donc  $\int_2^3 \frac{1}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2}[\ln(1 + x) - \ln(x - 1)]_2^3 = \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(2) - \ln(3) + \ln(1)) = \frac{\ln(2) - \ln(3)}{2}$  (la valeur est négative, ce qui est tout à fait normal).

## Exercice 20 (\*\*\*)

1. Comme d'habitude, on a trois propriétés à vérifier :

- on peut toujours écrire  $f = \text{id}^{-1} \circ f \circ \text{id}$  (l'application identité étant sa propre réciproque, bien entendu) ce qui prouve que  $f \sim f$  et donc que  $\sim$  est une relation réflexive.
- si  $f = h^{-1} \circ g \circ h$ , on peut composer la relation à gauche par  $h$  et à droite par  $h^{-1}$  pour obtenir  $h \circ f \circ h^{-1} = g$ . Comme  $h^{-1}$  est une application bijective de réciproque  $h$ , cela prouve que  $g \sim f$ , et la relation  $\sim$  est donc symétrique.
- supposons enfin que  $f \sim g$  et  $g \sim k$ , on peut alors trouver deux applications bijectives  $h$  et  $i$  telles que  $f = h^{-1} \circ g \circ h$  et  $g = i^{-1} \circ k \circ i$ . En remplaçant dans la première égalité, on a donc  $f = h^{-1} \circ i^{-1} \circ k \circ i \circ h = (h \circ i)^{-1} \circ f \circ (h \circ i)$  (en utilisant la relation vue en cours  $(h \circ i)^{-1} = i^{-1} \circ h^{-1}$ ). L'application  $h \circ i$  étant bijective comme composée d'applications bijectives, cela prouve que  $f \circ k$ , la relation  $\sim$  est donc transitive.

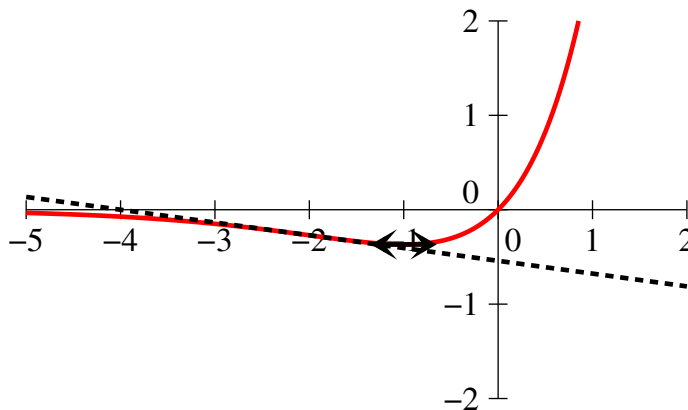
La relation étant réflexive, symétrique et transitive, il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

2. Une application  $g$  en relation avec la fonction nulle  $f$  vérifie :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = h^{-1} \circ f \circ h(x) = h^{-1}(0)$  (puisque  $f(h(x)) = 0$  indépendamment de la fonction  $h$ ), donc la fonction  $g$  est nécessairement constante. Réciproquement, toute fonction constante égale à un certain réel  $a$  est bien en relation avec la fonction nulle, il suffit en fait pour le prouver de trouver une fonction bijective  $h$  vérifiant  $h^{-1}(0) = a$ . En posant  $h(x) = x - a$ , la fonction  $h$  est bijective (c'est vraiment évident) et sa réciproque, définie par  $h^{-1}(x) = x + a$ , vérifie bien  $h^{-1}(0) = a$ . Finalement, la classe d'équivalence de  $f$  contient toutes les fonctions constantes.
3. C'est encore plus simple : quelle que soit l'application bijective  $h$ ,  $h^{-1} \circ \text{id} \circ h = h^{-1} \circ h = \text{id}$ , donc la classe d'équivalence de l'application identité est réduite à elle-même.
4. On sait qu'une composée d'applications injectives est injective. Si  $g = h^{-1} \circ f \circ h$ , avec  $f$  injective et  $h$  et  $h^{-1}$  bijectives (donc a fortiori injectives),  $g$  est donc bien injective.
5. Copier-coller de la réponse précédente en remplaçant toutes les occurrences du mot « injective » par « surjective ».
6. Bien sûr que non, on a vu plus haut que l'identité n'était en relation avec personne, donc en particulier avec aucune autre application bijective qu'elle-même.
7. Si  $f$  est bijective et  $g = h^{-1} \circ f \circ h$ , alors  $g$  est bijective comme composée de trois applications bijectives, et  $g^{-1} = (h^{-1} \circ f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1} \circ h$ , donc  $g^{-1} \sim f^{-1}$  (et, curieusement, c'est la même application bijective  $h$  qui effectue le lien entre les applications  $f$  et  $g$ , et entre leurs réciproques).
8. L'énoncé laisse clairement entendre que  $n \in \mathbb{N}$ , mais la relation resterait vraie pour tout entier négatif en exploitant la question précédente. Supposons donc que  $g = h^{-1} \circ f \circ h$ , alors  $g \circ g = h^{-1} \circ f \circ h \circ h^{-1} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f \circ \text{id} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f^2 \circ h$ , ce qui prouve que  $g^2 \circ f^2$ . Il n'y a plus qu'à itérer le procédé, en prouvant simplement par récurrence que  $g^n = h^{-1} \circ f^n \circ h$ . On a déjà vérifié l'initialisation aux rangs 1 et 2 mais ça marche aussi au rang 0 :  $g^0 = \text{id} = h^{-1} \circ \text{id} \circ h$  est vrai. Supposons donc la propriété vraie au rang  $n$ , alors  $g^{n+1} = g^n \circ g = h^{-1} \circ f^n \circ h \circ h^{-1} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f^n \circ f \circ h = h^{-1} \circ f^{n+1} \circ h$ , ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence. Bien entendu, la relation obtenue prouve que  $f^n \sim g^n$  (encore une fois, c'est toujours la même bijection  $h$  qui effectue la relation).
9. C'est un calcul classique, résolvons l'équation  $\text{sh}(x) = y$ , c'est-à-dire  $e^x + e^{-x} = 2y$ . Après un changement de variable  $X = e^x$  et une multiplication par  $e^x$  (qui ne peut jamais s'annuler), on se ramène à  $X^2 - 2yX - 1 = 0$ . Cette équation a pour discriminant  $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2 + 1)$ , qui est manifestement toujours positif. On a donc deux solutions  $X_1 = \frac{2y - 2\sqrt{1+y^2}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}$ , et  $X_2 = y + \sqrt{y^2 + 1}$ . La première solution est toujours strictement négative (car  $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = |y|$ , donc  $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$  quel que soit le signe de  $y$ ), on il ne reste donc qu'une seule solution à notre équation :  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = h(y)$ , ce qui prouve bien que  $h$  est la réciproque de  $\text{sh}$ .
10. On se doute qu'on doit avoir  $g = \text{sh} \circ f \circ h$  (ou le contraire), mais plutôt que de montrer directement l'égalité sous cette forme, il est un peu plus facile de montrer que  $g \circ \text{sh} = \text{sh} \circ f$  (ce qui est équivalent en composant par  $\text{sh}$  à droite), autrement dit que  $\text{sh}(2x) = 2 \text{sh}(x) \sqrt{1 + \text{sh}^2(x)}$ . En utilisant la relation  $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ , on a  $\text{ch}(x) = \sqrt{1 + \text{sh}^2(x)}$  (car  $\text{ch}$  est toujours positive), il suffit donc de prouver que  $\text{sh}(2x) = 2 \text{sh}(x) \text{ch}(x)$  (formule qui devrait vous rappeler une certaine formule de duplication du sinus). C'est assez facile :  $2 \text{sh}(x) \text{ch}(x) = \frac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{4} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \text{sh}(2x)$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont donc bien en relation pour  $\sim$ .

## Problème 1 (\*\*\*)

### I. Étude de $f$ et de sa réciproque.

- La fonction  $f$  a pour dérivée  $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ . La fonction admet donc un minimum en  $-1$ , de valeur  $f(-1) = -\frac{1}{e}$ . Sans difficulté,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , et en appliquant directement un résultat de croissance comparée,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .
- (a) La fonction  $f'$  est dérivable, de dérivée  $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$ . Elle s'annule effectivement une seule fois, en  $\alpha = -2$ .  
 (b) Puisque  $f(-2) = -\frac{2}{e^2}$  et  $f'(-2) = -\frac{1}{e^2}$ , la tangente a pour équation  $y = -\frac{1}{e^2}(x+2) - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x+4)$ . Elle coupe l'axe des abscisses pour  $x = -4$ .  
 (c) On cherche donc à étudier le signe de  $f(x) + \frac{1}{e^2}(x+4) = xe^x + \frac{1}{e^2}(x+4)$ . Cette expression a la même dérivée seconde que  $f$ , sa dérivée  $(x+1)e^x + \frac{1}{e^2}$  est donc décroissante sur  $] -\infty, -2]$  et croissante sur  $[-2, +\infty[$ . Comme elle vaut  $-\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2} = 0$  en  $-2$ , elle est donc toujours positive. L'expression  $f(x) + \frac{1}{e^2}(x+4)$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , elle s'annule également en  $x = -2$  (puisque la tangente  $y$  coupe la courbe représentative de  $f$ ), on en déduit que la tangente est au-dessus de la courbe sur  $] -\infty, -2]$ , et en-dessous sur  $[-2, +\infty[$ .
- Voici une allure de courbe :



- La fonction  $f$  étant continue et strictement croissante sur  $[-1, +\infty[$ , elle y est bijective vers son intervalle image  $[-\frac{1}{e}, +\infty[$ . Le théorème de la bijection donne directement le tableau de variations de  $g$  :

$x$	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f$	$-1$	$+\infty$

- En utilisant la formule de dérivation d'une réciproque,  $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}}$ .  
 Or, par définition, la fonction  $g$  vérifie  $g(x)e^{g(x)} = x$ . On peut donc écrire, lorsque  $x \neq 0$ ,

$e^{g(x)} = \frac{x}{g(x)}$ , et  $g'(x) = \frac{g(x)}{x(g(x)+1)}$ . En particulier, la fonction  $g$  est solution de l'équation différentielle  $xy'(y+1) = y$ .

- En effet, cette équation s'écrit  $e^{x \ln(2)} = x$ , soit en multipliant chaque membre par  $\ln(2)$ ,  $\frac{x \ln(2)}{e^{x \ln(2)}} = \ln(2)$ , donc  $-x \ln(2) e^{-x \ln(2)} = -\ln(2)$ . Autrement dit  $f(-x \ln(2)) = -\ln(2)$ , ce qui équivaut à  $-x \ln(2) = g(-\ln(2))$ , soit  $x = -\frac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$ .
- On peut écrire l'équation sous la forme  $e^{x \ln(x)} = 3$ , soit  $x \ln(x) = \ln(3)$ . En posant  $X = \ln(x)$ , on se ramène à l'équation  $f(X) = \ln(3)$ , soit  $X = g(\ln(3))$ . On a donc  $\ln(X) = e^{g(\ln(3))}$ , soit  $x = e^{g(\ln(3))}$ .

## II. Des fonctions auxiliaires.

- La fonction  $h_a$  est évidemment dérivable, de dérivée  $h'_a(x) = -e^{-x} + 2ax = e^{-x}(-1 + 2af(x))$ , qui est du signe de  $2af(x) - 1$ . Elle s'annule lorsque  $f(x) = \frac{1}{2a}$  (valeur atteinte une unique fois par la fonction  $f$ ), autrement dit en  $m_a = g\left(\frac{1}{2a}\right)$ . Son image par la fonction  $h$  est  $h_a(m_a) = e^{-g(\frac{1}{2a})} + a \left(g\left(\frac{1}{2a}\right)\right)^2 = e^{-m_a} + am_a^2$ . Or, par définition,  $m_a = g\left(\frac{1}{2a}\right)$  implique  $f(m_a) = \frac{1}{2a}$ , soit  $m_a e^{m_a} = \frac{1}{2a}$ , donc  $e^{-m_a} = 2am_a$ , et  $h_a(m_a) = 2am_a + am_a^2 = am_a(m_a + 2)$ .
- Puisque  $i(a) = g\left(\frac{1}{2a}\right)$ , que  $a \mapsto \frac{1}{2a}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , et que  $g$  est croissante sur son domaine de définition,  $i$  est une fonction décroissante. Par simple composition de limite,  $\lim_{a \rightarrow +\infty} i(a) = g(0) = 0$ , et  $\lim_{a \rightarrow 0^+} i(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .
- Il suffit de constater que, si  $a < b$ , on aura  $h_a(x) < h_b(x)$  sur  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $h_a(m_b) < h_b(m_b)$ . Comme  $m_a$  est le minimum de la fonction  $h_a$ , on a également  $h_a(m_a) \leq h_a(m_b)$ , dont on déduit que  $h_a(m_a) < h_b(m_b)$ . La valeur du minimum est donc une fonction strictement croissante de la variable  $a$ . Reste à déterminer la limite quand  $a$  tend vers  $+\infty$  de  $am_a(m_a + 2)$ . On sait déjà que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} m_a = 0$ , donc  $\lim_{a \rightarrow +\infty} m_a + 2 = 2$ . De plus,  $am_a = \frac{1}{2}e^{-m_a}$ , qui a pour limite  $\frac{1}{2}$ , donc  $\lim_{a \rightarrow +\infty} h_a(m_a) = 1$ .

## Problème 2 : Un peu de géométrie! (\*\*)

### I. Une inégalité classique.

- Posons donc  $f(x) = x(1-x)^2 = x - 2x^2 + x^3$ , et étudions les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  : la fonction est évidemment dérivable, et  $f'(x) = 1 - 4x + 3x^2$ , dérivée ayant pour discriminant  $\Delta = 16 - 12 = 4$ , et s'annulant en  $x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$  et en  $x_2 = \frac{4+2}{6} = 1$ . Elle est positive sur  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ , et croissante sur  $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ . La fonction atteint donc comme maximum sur l'intervalle  $[0, 1]$  la valeur  $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$ . On a exactement prouvé ce qui était demandé.
- (a) On va bien entendu passer par un calcul de dérivée :  $f'_a(x) = -2ax + a(1-a)$ . Elle s'annule en  $x = \frac{a(1-a)}{2a} = \frac{1-a}{2}$ , qui appartient bien sûr à l'intervalle  $[0, 1-a]$ . La dérivée étant

positive avant cette valeur et négative après, la fonction  $f_a$  admet pour maximum la valeur  $f\left(\frac{1-a}{2}\right) = -a\frac{(1-a)^2}{4} + a(1-a)\frac{1-a}{2} = \frac{a(1-a)^2}{4}$ .

- (b) Commençons par fixer la valeur de  $a$ , le réel  $b$  varie alors entre 0 et  $1-a$  (les trois réels étant positifs et de somme 1), et  $c = 1-a-b$ , donc  $abc = ab(1-a-b) = -ab^2 + a(1-a)b$ . La question précédente nous assure que cette valeur est maximale si  $b = \frac{1-a}{2}$ , ce qui revient à dire que  $c = b$ . Cherchons désormais la valeur de  $a$  pour laquelle  $abc$  est maximale en imposant  $c = b = \frac{1-a}{2}$ . On a alors  $abc = \frac{a(1-a)^2}{4}$ , qui est majoré d'après la première question par  $\frac{1}{27}$  (il suffit de tout diviser par 4). Cela prouve que, dans les conditions données,  $abc \leq \frac{1}{27}$ .
- (c) Pour maximiser  $abc$ , il faut avoir d'une part  $c = b = \frac{1-a}{2}$ , puis  $a = \frac{1}{3}$  (question 1), ce qui impose  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .
3. Posons  $a = \frac{x}{x+y+z}$ ,  $b = \frac{y}{x+y+z}$  et  $c = \frac{z}{x+y+z}$ . Ces trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont positifs et vérifient  $a+b+c = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$ . En appliquant les résultats précédents,  $abc \leq \frac{1}{27}$ . En multipliant trois fois par  $x+y+z$ , on trouve exactement  $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ . Un seul cas extrêmement particulier : si  $x = y = z = 0$ , on ne peut pas diviser par  $x+y+z$ , mais dans ce cas, l'inégalité demandée est triviale!
4. C'est une égalité si  $a = b = c$ , ce qui revient exactement à dire que  $x = y = z$ .

## II. Applications aux triangles.

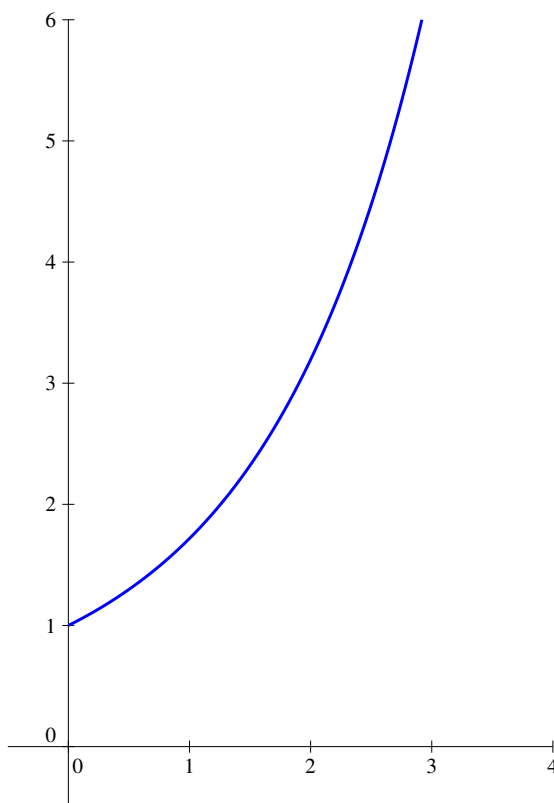
- Dans un triangle, la somme des longueurs de deux côtés est toujours plus grande que le troisième côté. Ici, par exemple,  $a \leq b+c$ , donc  $2a \leq a+b+c = 2p$ , ce qui implique  $2p-2a \geq 0$  et donc  $x \geq 0$ . C'est exactement similaire pour les deux autres côtés.
- Le périmètre  $p$  étant fixé,  $\mathcal{A}$  est maximale quand  $(p-a)(p-b)(p-c)$  est maximale d'après la formule de Héron, donc quand  $xyz$  est maximal. Le maximum de  $xyz$  est égal à  $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ .  
Or,  $x+y+z = 3p-a-b-c = 3p-2p = p$ , donc le maximum de  $xyz$  vaut  $\frac{p^3}{27}$ , et celui de  $\mathcal{A}$  est égal à  $\sqrt{p \times \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{\sqrt{27}}$ .
- Puisqu'on doit avoir  $x = y = z$ , cela revient à dire que  $a = b = c$ . Autrement dit, le triangle est alors équilatéral.

## Problème 3 (\*\*)

### A. Étude de la fonction $f_0$ .

- La convexité de la fonction exponentielle permet d'affirmer que,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \geq x+1$  (la droite d'équation  $y = x+1$  étant tangente à la courbe de l'exponentielle). On peut appliquer cette inégalité au réel  $-x$  pour obtenir  $e^{-x} \geq 1-x$ , soit  $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ . En multipliant tout par le réel positif  $e^x$ , on trouve immédiatement la deuxième inégalité demandée :  $1 + (x-1)e^x \geq 0$ .

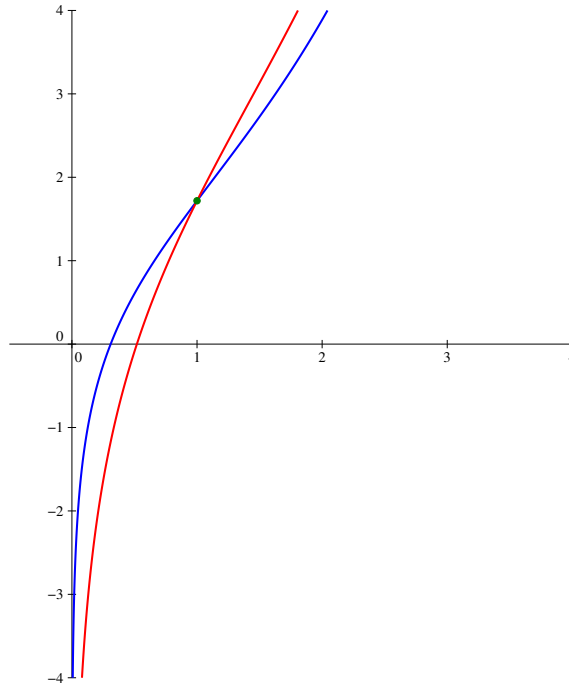
2. On a simplement  $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ . Or, on sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  (limite de taux d'accroissement), donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = 1$ . De l'autre côté, on écrit  $f_0(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$  et on exploite la croissance comparée pour affirmer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty$ .
3. La fonction  $f_0$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $f'_0(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{1 + (x - 1)e^x}{x^2}$ . Comme on a prouvé à la première question que le numérateur de ce quotient était toujours positif, la fonction  $f_0$  est tout simplement strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .
4. Pour pouvoir tracer une allure intéressante, il faudrait au moins être capable de déterminer la direction de la courbe du côté de 0 (par exemple savoir s'il y a une tangente une fois qu'on a prolongé par continuité en rajoutant la valeur 1 correspondant à la limite en 0). Malheureusement, le calcul de  $\lim_{x \rightarrow 0} f'_0(x)$  dépasse nos capacités actuelles (je peux vous affirmer que cette limite existe et vaut  $\frac{1}{2}$ , mais on ne pourra le prouver qu'une fois les développements limités étudiés). En attendant, difficile de faire mieux qu'un truc extrêmement imprécis.



## B. Étude de la famille de fonctions $(f_n)$ .

1. On a vu plus haut que la fonction  $f_0$  était strictement croissante, comme la fonction  $x \mapsto n \ln(x)$  l'est également, toutes les fonctions  $f_n$  sont sommes de fonctions croissantes, et donc strictement croissantes sur  $]0, +\infty[$ .
2. De façon évidente,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ , et le calcul de la limite de  $f_0$  en 0 effectué dans la première partie permet d'affirmer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty$  pour tout entier  $n \geq 1$ .
3. On a simplement  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln(x)$ , donc  $\mathcal{C}_{n+1}$  est située au-dessus de  $\mathcal{C}_n$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  et en-dessous sur l'intervalle  $]0, 1[$ . Toutes les courbes se coupent au point de coordonnées  $(1, e - 1)$  puisque  $f_n(1) = e - 1$ .

4. La fonction  $f_1$  est continue et strictement croissante, donc bijective de  $]0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ . En particulier, elle s'annule une seule fois.
5. Comme  $f_1(1) = e - 1 > 0$ , la valeur d'annulation  $\alpha_1$  appartient nécessairement à l'intervalle  $]0, 1[$ . Les positions relatives obtenues pour les différentes courbes sur cet intervalle assurent alors que  $f_n(\alpha_1) < f_1(\alpha_1) = 0$ . L'annulation de la fonction  $f_n$  découle de la bijectivité de cette dernière, et comme  $f_n(\alpha_1) < 0 < f_n(0)$ , la stricte croissance de la fonction  $f_n$  permet d'affirmer que  $\alpha_1 < \alpha_n < 1$ .
6. La fonction  $f_0$  étant croissante,  $\forall x \in ]0, 1]$ ,  $f_0(x) \leq f_0(1)$ , soit  $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$ . Par définition,  $f_n(\alpha_n) = 0$ , donc  $\frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} + n \ln(\alpha_n) = 0$ , ce qu'on peut écrire  $n \ln(\alpha_n) = \frac{1 - e^{\alpha_n}}{\alpha_n}$ . En appliquant l'inégalité obtenue juste avant, on a donc  $n \ln(\alpha_n) \geq 1 - e$ , soit  $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1 - e}{n}$ .
7. La majoration  $\alpha_n \leq 1$  implique que  $\ln(\alpha_n) \leq 0$ . Combinée à la minoration de la question précédente, on a donc  $\frac{1 - e}{n} \leq \ln(\alpha_n) \leq 0$ . Une simple application du théorème des gendarmes donne alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n) = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = e^0 = 1$ .
8. Là encore, il n'y a pas grand chose de passionnant à tracer...



### C. Un peu de calcul d'intégrales.

1. Sur l'intervalle  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ , on sait que  $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ , donc  $I_n \leq I_{n+1}$  (on a le droit d'intégrer des inégalités sur un intervalle). Autrement dit, la suite  $(I_n)$  est croissante.
2. Il suffit de constater que  $I_{n+1} - I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_{n+1}(t) - f_n(t) dt = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln(t) dt$  est constant pour en déduire que la suite  $(I_n)$  est une suite arithmétique. On peut même calculer la valeur de la raison :  $\int_1^{\frac{3}{2}} \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} - 0 + 1 = \frac{3 \ln(3) - 3 \ln(2) - 1}{2}$  (c'est très proche de 0).