

Feuille d'exercices n° 10 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

14 décembre 2023

Exercice 1 (* à ***)

- $\frac{2x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \frac{2x^2(x-2) + x - 2}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2 + 1}{x+2}$ si $x \neq 2$. On en déduit aisément que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \frac{9}{4}$.
- En posant $X = e^{-x}$, on aura $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$, et $e^x \sin(e^{-x}) = \frac{\sin(X)}{X}$ a donc pour limite 1 (limite classique vue en cours). On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \sin(e^{-x}) = 1$.
- En factorisant par e^x dans le ln, $\frac{x^2}{\ln(e^x + 1)} = \frac{x^2}{x + \ln(1 + e^{-x})} = \frac{x}{1 + \frac{\ln(1+e^{-x})}{x}}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(1 + e^x)} = +\infty$.
- Quantité conjuguée complètement superflue ici : $\sqrt{x^2 + x - 1} - x\sqrt{x} = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - \sqrt{x} \right)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} - x\sqrt{x} = -\infty$.
- $\frac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x} = e^{\ln^2(x) - x \ln(\ln(x))}$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - x \ln(\ln(x)) = -\infty$ par croissance comparée. Du coup, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x} = 0$.
- L'encadrement $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x + x^2 - 1)}{x} \leq \frac{1}{x}$ suffit à conclure par le théorème des gendarmes que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x + x^2 - 1)}{x} = 0$.
- On reconnaît ici l'inverse du taux d'accroissement de la fonction arccos en 0 : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\arccos(x) - \arccos(0)}{x - 0} = \arccos'(0) = -\frac{1}{\sqrt{1-0}} = -1$. Comme $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arccos(x) - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$.
- Encore une histoire d'encadrement : $\frac{1}{x} - 1 < Ent\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$, donc $1 - x \leq x Ent\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ si $x \geq 0$ (sinon, l'encadrement est le même mais avec les inégalités dans l'autre sens). Dans les deux cas, les deux membres extrêmes de l'encadrement ont pour limite 1 en 0, donc $\lim_{x \rightarrow 0} x Ent\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.
- On écrit $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$ et on conclut immédiatement à l'aide de la croissance comparée que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.
- Si $x \in [0; 1[$, $x - Ent(x) = x$, donc $\frac{x - Ent(x)}{\sqrt{|x|}} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - Ent(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$. De

l'autre côté, sur $[-1; 1[$, $x - Ent(x) = x - 1$, donc $\frac{x - Ent(x)}{\sqrt{|x|}} = \frac{x - 1}{\sqrt{-x}}$, qui tend vers $-\infty$ en 0^- . Il n'y a donc pas de limite en 0.

- Encore un coup où -1 est racine du numérateur et du dénominateur. Le numérateur a pour autre racine évidente 1, et le produit des racines vaut 1, donc -1 est en fait racine double et le numérateur se factorise en $(x - 1)(x + 1)^2$. Le dénominateur se factorise sous la forme $(x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c$; par identification très facile, $a = 1$, $b = -1$ et $c = -2$, donc $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x - 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)^2}{(x + 1)(x^2 - x - 2)} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{x - 1}{x - 2}$ si $x \neq -1$. Suffisant pour conclure que $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x - 2} = \frac{2}{3}$.

- Encore du boulot pour le passage à l'exponentielle : $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{(\ln(\ln(x)) - \ln(x))/x}$. Tout ce qui est dans l'exponentielle tend vers 0 par croissance comparée, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$.

- Il suffit d'écrire $\frac{\text{sh}(x)}{e^x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}}$ pour constater que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}(x)}{e^x} = \frac{1}{2}$.

- On peut écrire $\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)} = \frac{2}{1 - \cos^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)} = \frac{1}{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))} = \frac{1}{1 + \cos(x)}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)} = \frac{1}{2}$.

- Il suffit ici de poser $X = \ln(x)$. Quand x tend vers 1, X tend vers 0, et $\ln(x) \ln(\ln(x)) = X \ln(X)$. Comme on sait, par croissance comparée, que $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln(X) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) \ln(\ln(x)) = 0$.

- Quantité conjuguée : $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$
 $= \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x} \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}}\right)}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}$.

- $x^{x+1} - (x+1)^x = x^x \left(x - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)$. Or, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$. En posant $X = \frac{1}{x}$, $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1 + X)}{X}$, qui a pour limite 1 car X tend vers 0 (limite classique), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$. Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{x+1} - (x+1)^x = +\infty$.

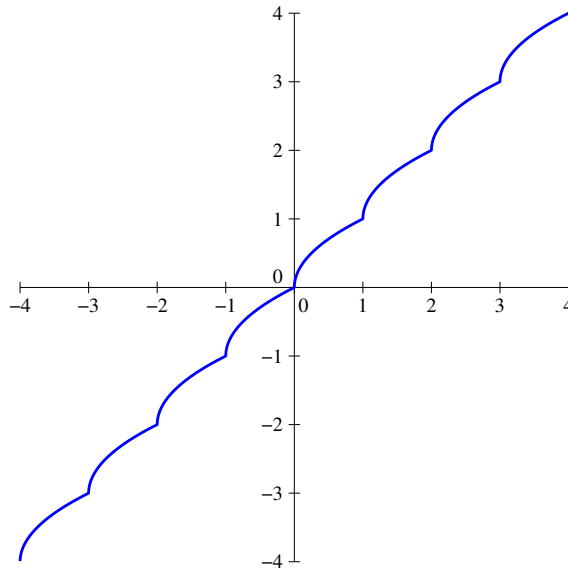
- $\frac{x^2 - 1}{(\sqrt{x} - 1) \ln(x)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(\sqrt{x} - 1) \ln(x)} = \frac{(x + 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1) \ln(x)} = \frac{(x + 1)(\sqrt{x} + 1)}{\ln(x)}$. Plus de forme indéterminée, on a directement $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(\sqrt{x} - 1) \ln(x)} = +\infty$.

Exercice 2 (** à ***)

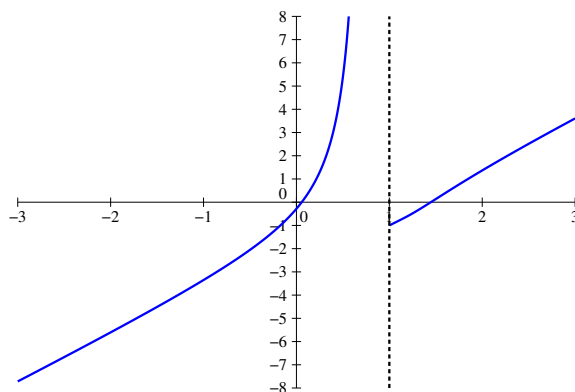
1. La fonction f_1 est évidemment définie et continue sur \mathbb{R}^* . En 0, une limite classique du cours permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, donc f_1 est prolongeable par continuité en une fonction g_1 définie sur \mathbb{R} en posant $g_1(0) = 1$.
2. La fonction f_2 est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Quand x tend vers -1 , le numérateur de f_2 tend vers 2 et le dénominateur vers 0, on ne peut pas avoir de limite finie, et donc pas

de prolongement par continuité. Par contre, $f_2(x) = \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1+x}$ si $x \neq 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = \frac{1}{2}$, et f_2 est prolongeable par continuité en posant $g_2(1) = \frac{1}{2}$.

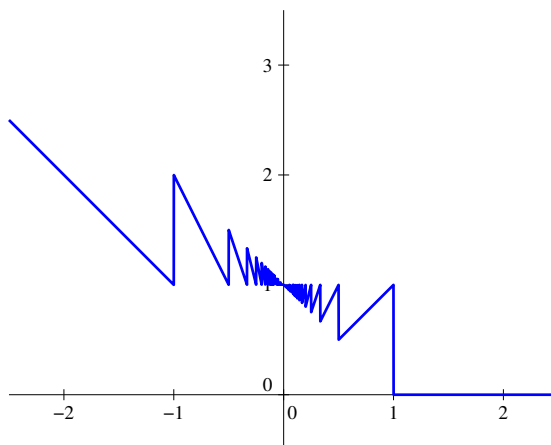
3. La fonction f_3 est définie et continue sur tous les intervalles de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$, pour $k \in \mathbb{N}$. Si $k \neq 0$, $(k\pi)^2 \ln(k\pi)$ est une constante non nulle, donc la fonction f_3 ne peut pas avoir de limite finie en $k\pi$ (en l'occurrence, elle tend vers $+\infty$ à gauche et $-\infty$ à droite si k est impair, et le contraire si k est pair, à cause du signe de $\sin(x)$ au voisinage de $k\pi$). Par contre, $\frac{x^2 \ln(x)}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} \times x \ln(x)$, donc par croissance comparée et en utilisant une limite classique, $\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) = 0$, ce qui permet de prolonger par continuité en posant $g_3(0) = 0$.
4. La fonction f_4 est définie et continue sur tous les intervalles de la forme $]n, n+1[$, pour $n \in \mathbb{Z}$. On peut même ajouter, puisque la fonction partie entière est continue à droite en chaque entier, que $\lim_{x \rightarrow n^+} f_4(x) = f_4(n) = n + \sqrt{n-n} = n$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow n^-} f_4(x) = n-1$, donc $\lim_{x \rightarrow n^-} f_4(x) = n-1 + \sqrt{n-(n-1)} = n-1+1 = n$. Finalement, la fonction f_4 est continue sur \mathbb{R} (pas besoin de prolonger quoi que ce soit ici, la fonction f_4 est déjà définie sur \mathbb{R}). Une allure de la courbe :



5. La fonction f_5 est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. En 1, on peut écrire $f_5(x) = \frac{x-1-3}{(x-1)^2} = \frac{x-4}{(x-1)^2}$. Le dénominateur étant non nul quand $x = 1$, pas de limite finie en vue, et donc pas de prolongement par continuité.
6. Cette drôle de fonction est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$, on aura $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_6(x) = +\infty$, donc pas de prolongement possible. Pourtant, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$, et par conséquent $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_6(x) = -1$. On est en présence d'un cas assez rare : la fonction est prolongeable « par continuité à droite » en posant $g_6(1) = -1$. Une allure de la courbe :

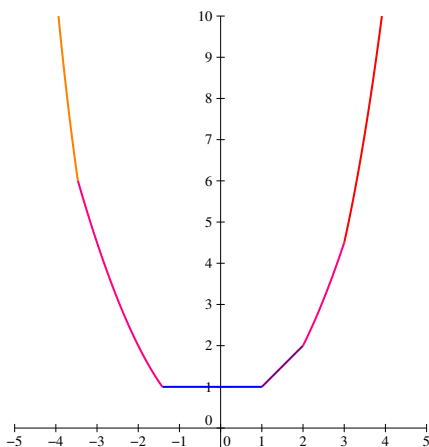


7. La fonction f_7 est définie et continue sur \mathbb{R}^* , et prolongeable par continuité en 0 en posant $g_7(0) = 0$ (croissance comparée). L'énoncé serait plus intéressant avec $h_7(x) = \frac{x \ln(x)}{x-1}$, qui est définie et continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, et prolongeable en 0 (même raisonnement que pour f_7) mais aussi en 1 en posant $g_7(1) = 1$, à cause de la limite classique $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.
8. La fonction f_8 est définie sur \mathbb{R}^* , et continue en a pour tout nombre a qui n'est pas de la forme $\frac{1}{n}$ (pour un entier $n \in \mathbb{Z}^*$) par continuité en $n \notin \mathbb{Z}$ de la fonction partie entière. Supposons donc dans un premier temps $a = \frac{1}{n}$, avec $n > 0$. On calcule $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x} = n^+$ (la fonction inverse étant décroissante sur \mathbb{R}^{+*} , il faut bien faire attention aux positions des limites), puis $f_8(x) = \frac{1}{x} \times n = 1$. De l'autre côté, on aura $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x} = n^-$, la partie entière tendra donc vers $n-1$, ce qui implique que $\lim_{x \rightarrow a^+} f_8(x) = \frac{n-1}{n}$. Les limites à gauche et à droite étant distinctes, f_8 ne peut pas être continue en a . On aura le même problème si $a = \frac{1}{n}$ avec $n < 0$ (limites différentes à gauche et à droite). Reste un cas un peu à part à traiter : celui de 0. On peut toujours écrire l'encadrement $\frac{1}{x} \leq \text{Ent}\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} + 1$, donc $1 \leq f_8(x) \leq 1 + x$. Le théorème des gendarmes prouve que alors que $\lim_{x \rightarrow 0} f_8(x) = 1$, ce qui permet de prolonger f_8 par continuité en 0 en posant $g_8(0) = 0$. Ci-dessous une allure de la courbe de cette drôle de fonction (tracée avec les pieds par le logiciel que j'utilise, qui n'est pas capable de traiter correctement les points de discontinuité, d'où les traits verticaux qui ne devraient pas exister) :



9. En fait, cette fonction extrêmement étrange n'est pas si affreuse que ça à étudier, puisqu'on peut l'explicitier intervalle par intervalle. Regardons d'abord ce qui se passe sur \mathbb{R}^+ , et notons

$h_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!}$. On constate que $h'_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = h_{n-1}(x)$. Par ailleurs, $h_n(x) = 0 \Leftrightarrow n!x^{n+1} = (n+1)!x^n$, ce qui se produit lorsque $x = 0$ ou $x = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$. La fonction h_n est donc décroissante sur $[0, n]$ et croissante sur $[n, +\infty]$, et surtout négative sur $[0, n+1]$ puisque'elle y est décroissante puis croissante et s'annule en 0 et en $n+1$, et positive sur $[n+1, +\infty[$. On déduit de ces constatations que, sur l'intervalle $[0, 1]$, $\frac{x^0}{0!} \geq \frac{x^1}{1!} \geq \frac{x^2}{2!}$ etc, donc $f_9(x) = \frac{x^0}{0!} = 1$. Sur $[1, 2]$, $\frac{x^0}{0!} \leq \frac{x^1}{1!}$, mais $\frac{x^1}{1!} \geq \frac{x^2}{2!}$ etc, donc $f_9(x) = \frac{x^1}{1!} = x$. De même, sur chaque intervalle de la forme $[n, n+1]$, $f_9(x) = \frac{x^n}{n!}$. Toutes ces fonctions étant continues, et les changements de fonction s'effectuant à des points d'intersection de deux courbes de fonctions continues, la fonction f sera continue sur \mathbb{R}^+ . Sur \mathbb{R}^- , c'est extrêmement similaire, la seule différence étant due au fait que les entiers impairs sont à oublier puisque $\frac{x^n}{n!}$ prend des valeurs négatives sur \mathbb{R}^- lorsque n est impair (la valeur de f est donc constante côté négatif jusqu'à $x = -\sqrt{2}$, valeur en-deça de laquelle on aura $\frac{x^2}{2} > 1$, on conserve ensuite $f_9(x) = \frac{x^2}{2}$ jusqu'à avoir $\frac{x^4}{24} = \frac{x^2}{2}$, soit lorsque $x = -\sqrt{12}$, et ainsi de suite). Voici un bout de la courbe de la fonction f_9 (les morceaux correspondant à des valeurs de n différentes sont de différentes couleurs) :



Exercice 3 (***)

Seul 0 peut poser un problème de continuité à droite. Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, et f est bien continue en 0. De plus, $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Posons $X = \frac{1}{x}$, on a lors $f'(x) = 2X^3e^{-X^2}$, qui par croissance comparée a pour limite 0 en $+\infty$, donc f' est également continue en 0. On fait le même type de calcul pour $f'' : \forall x > 0$, $f''(x) = \left(\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, qui a également pour limite 0 en 0.

Pour les dérivées ultérieures, le principe est le même, mais pour tout traiter d'un seul coup, il est nécessaire d'effectuer une récurrence pour prouver que la n -ième dérivée de la fonction f (sur $]0, +\infty[$) peut s'écrire sous la forme $\frac{P_n(x)}{x^{a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$, où a_n est un entier naturel et P_n est un polynôme. C'est vrai pour $n = 1$ et même $n = 2$ d'après les calculs précédents. Supposons désormais que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$. On peut dériver cette fonction sur $]0, +\infty[$ et obtenir $\frac{x^{a_n}P'_n(x) - a_n n x^{a_n-1}P_n(x)}{x^{2a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} -$

$\frac{2P_n(x)}{x^{a_n+3}} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ceci est bien de la forme voulue, ce qui achève la récurrence. Or, un quotient de polynômes multiplié par $e^{-\frac{1}{x^2}}$ a toujours pour limite 0 en 0 (toujours de la croissance comparée), donc la dérivée n -ième de f est continue en 0.

Exercice 4 (** à ***)

- Par une récurrence facile, si $f(x) = f(x^2)$, on aura, pour tout entier naturel n , $f(x) = f(x^{2^n})$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$ (et même $n = 0$), et si on le suppose vrai pour un entier n , alors $f(x) = f(x^{2^n}) = f((x^{2^n})^2) = f(x^{2^{n+1}})$. Si $x \in [0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2^n} = 0$ (mettez sous forme exponentielle si ça ne vous semble pas clair), donc par continuité de f en 0, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x^{2^n}) = f(0)$. Comme la suite $(f(x^{2^n}))$ est constante égale à $f(x)$, on en déduit que $\forall x \in [0, 1[$, $f(x) = f(0)$. La fonction f est donc constante sur $[0, 1[$. En particulier, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(0)$, donc, par continuité de f en 1, $f(1) = f(0)$. Occupons-nous maintenant des réels strictement supérieurs à 1. On ne peut pas appliquer le même raisonnement que ci-dessus, mais par contre on constate que $f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(x)$ pour tout entier n , en appliquant simplement la remarque initiale à $x^{\frac{1}{2^n}}$. Cette fois-ci, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$ (puisque $x^{\frac{1}{2^n}} = e^{\frac{\ln(x)}{2^n}}$, qui tend vers $e^0 = 1$), et on conclut comme tout à l'heure que $f(x) = f(1) = f(0)$. La fonction f est donc constante sur \mathbb{R}_+ . Et sur \mathbb{R}^- ? Si $x \leq 0$, $x^2 \geq 0$, donc $f(x) = f(x^2) = f(0)$. Finalement, la fonction f est constante. Réciproquement, toute fonction constante est évidemment solution du problème posé.
- Soit $x \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$. Par une récurrence immédiate, on aura toujours $f(u_n) = f(x)$ (en effet, c'est vrai pour u_0 et $f(u_{n+1}) = f\left(\frac{u_n + 1}{2}\right) = f(u_n)$). Étudions donc le comportement de la suite (u_n) . Pour cela, on pose $g(x) = \frac{x + 1}{2}$, qui est une fonction affine strictement croissante admettant un unique point fixe $x = 1$. De plus, $g(x) - x \leq 0$ si $x \geq 1$, et $g(x) - x \geq 0$ si $x \leq 1$. Si $x \geq 1$, on prouve par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$, et la suite étant décroissante, elle va nécessairement converger vers l'unique point fixe de la fonction, à savoir 1. De même, si $x \leq 1$, la suite est croissante majorée par 1, et converge vers 1. Dans tous les cas, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, donc par continuité de la fonction f , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(1)$. La suite $(f(u_n))$ étant constante égale à $f(x)$, on en déduit que $f(x) = f(1)$. La fonction f est donc constante. Réciproquement, les fonctions constantes sont solutions triviales du problème posé.
- Comme dans les autres problèmes de cet exercice, il faut essayer d'itérer l'équation donnée, en divisant par 2 plutôt qu'en multipliant (car c'est plus pratique pour trouver des limites) : $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{8}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right)$ etc. Une récurrence simple permet de prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$: c'est vrai au rang 0 puisque la condition est alors $f(x) = f(x)$, et si on le suppose au rang n , il suffit de remplacer le $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ par $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ pour obtenir la relation au rang $n + 1$. Reste l'astuce diabolique du jour : tout multiplier par $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$. En effet, $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n}$. Si ça ne vous semble pas clair c'est que vous avez oublié la formule de duplication $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$. Allez, prouvons-le quand même par récurrence : au rang 0, $\sin(x) = \sin(x)$ est vrai. Supposons la formule vraie au rang

n , alors $\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(2 \times \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Ne reste plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence pour trouver $\frac{1}{2} \times \frac{\sin(x)}{2^n} = \frac{\sin(x)}{2^{n+1}}$. Bref, après ces calculs fantastiquement élémentaires, il nous reste la relation $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)f(x) = \frac{\sin(x)}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Considérons un $x \neq 0$, alors à partir d'un certain rang $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$, et on peut écrire $f(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Il ne reste plus qu'à faire gentiment tendre n vers $+\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$, donc par continuité $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0) = 1$; et $\frac{1}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ a pour limite $\frac{1}{x}$ (limite classique de $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0). Finalement, la limite du tout quand n tend vers $+\infty$ vaut $\frac{\sin(x)}{x}$. Puisque la suite est constante, on en déduit que $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ (prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$). On vérifie aisément que cette fonction est solution : $f(x)\cos(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} = \frac{\sin(2x)}{2x} = f(2x)$.

4. Supposons donc $f(0) = f(1) = 0$. La fonction f est alors impaire puisque $f(x) + f(-x) = 2f\left(\frac{x-x}{2}\right) = 2f(0) = 0$. Par ailleurs, en prenant $y = 2 - x$ (pourquoi pas ?), on constate que $f(x) + f(2-x) = 2f\left(\frac{x+2-x}{2}\right) = 2f(1) = 0$, donc $f(x) = -f(2-x) = f(x-2)$. Ceci prouve que la fonction f est 2-périodique. Or, une fonction périodique et continue est nécessairement bornée. En effet, ici, f est sûrement bornée sur $[0, 2]$ puisque l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, et f reprend ensuite les mêmes valeurs que sur $[0, 2]$, donc les bornes restent valables sur \mathbb{R} . Or, si la fonction n'était pas nulle, il existerait certainement un x tel que $f(x) > 0$ (puisque f est impaire). La relation initiale implique, en prenant $x = y$, que $f(x) = \frac{1}{2}f(2x)$, ou si on préfère que $f(2x) = 2f(x)$. Par une récurrence facile, on prouve alors que, pour tout entier n , $f(2^n x) = 2^n f(x)$. En effet, c'est vrai au rang 0, et en le supposant au rang n , $f(2^{n+1}x) = f(2 \times 2^n x) = 2f(2^n x) = 2 \times 2^n f(x) = 2^{n+1}f(x)$. En appliquant ceci à notre x dont l'image est strictement positive, on obtiendra $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2^n x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n f(x) = +\infty$, ce qui est très contradictoire avec le fait que la fonction f est bornée. La fonction f est donc nécessairement nulle.

Passons au cas général, et posons $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$. La fonction $g : x \mapsto f(x) - ax - b$ vérifie les hypothèses du cas particulier précédent : $g(0) = f(0) - b = 0$, $g(1) = f(1) - (f(1) - f(0)) - f(0) = 0$, et $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - a\left(\frac{x+y}{2}\right) - b = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) - \frac{1}{2}(ax + ay) - \frac{1}{2}(b + b) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$. La fonction g est donc nulle. Autrement dit, $f(x) = ax + b$, c'est-à-dire que f est une fonction affine. Réciproquement, toutes les fonctions affines sont solutions du problème posé (on l'a déjà vérifié sans le dire en faisant le petit calcul pour g).

5. En posant $x = y$ dans la relation donnée, $f\left(\frac{2x}{3}\right) = f(x)$. On peut appliquer successivement cette nouvelle équation pour obtenir $f\left(\frac{4x}{9}\right) = f\left(\frac{2x}{3}\right) = f(x)$ puis, pour tout entier naturel n , $f\left(\frac{2^n x}{3^n}\right) = f(x)$ (récurrence immédiate si on tient à être rigoureux). Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n x = 0$, donc par continuité de f en 0, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2^n x}{3^n}\right) = f(0)$, ce qui prouve que $f(x) = f(0)$. Autrement dit, f est une fonction constante. Réciproquement, toutes les fonctions constantes sont solutions du problème.

6. Commençons par prouver par récurrence sur n que $\forall(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$. C'est trivialement vrai pour $n = 0$ (ou même pour $n = 1$, et, si on suppose $f(nx) = nf(x)$, on peut appliquer l'équation fonctionnelle avec $y = nx$ pour obtenir $f(x + nx) = f(x) + f(nx)$, soit $f((n+1)x) = f(x) + nf(x) = (n+1)f(x)$, ce qui prouve l'hérédité. En particulier, en posant $a = f(1)$, on aura $f(n) = na$ pour tout entier naturel n (et donc bien sûr $f(0) = 0$). Posons maintenant $y = -x$ dans l'équation : $f(x-x) = f(x) + f(-x)$, donc $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, ce qui prouve que f est impaire et donc que l'égalité $f(n) = na$ reste valable pour tout entier relatif n . Supposons désormais $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (avec $q > 0$), alors $f(qx) = f(p) = pa$. Or on a vu que $f(qx) = qf(x)$, ce qui prouve que $f(x) = \frac{pa}{q} = xa$. Il ne reste plus qu'à traiter le cas où x est irrationnel. Dans ce cas, il existe une suite (u_n) de nombres rationnels convergeant vers x (densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}). Par continuité de f en x , on peut donc écrire $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n a = xa$, ce qui prouve que la relation $f(x) = xa$ est valable pour tout réel, et donc que f est une fonction linéaire.

Exercice 5 (*)

Supposons par l'absurde que f soit une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{Z} , et que f ne soit pas constante. Autrement dit, on peut trouver deux réels x et y tels que $f(x) = n$ et $f(y) = p$, avec $n \neq p$. Mais alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout réel compris entre n et p admet des antécédents par la fonction f . Comme il existe certainement autre chose que des nombres entiers entre n et p , ce n'est pas possible.

Exercice 6 (**)

1. L'hypothèse k -Lipschitzienne implique que $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq k(y - x) = k(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} - \sqrt{x})$, donc $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \frac{1}{k}$. C'est évidemment complètement aberrant, il suffit de prendre $x = 0$ et y suffisamment proche de 0 pour que $\sqrt{y} < \frac{1}{k}$ (par exemple $y = \frac{1}{4k^2}$). La fonction racine carrée n'est donc pas Lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
2. On utilise de même le produit par la quantité conjuguée : en supposant $x < y$, $\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{y - x}{2}$ puisque $\sqrt{x} \geq 1$ et $\sqrt{y} \geq 1$ avec l'hypothèse qu'on travaille désormais sur $[1, +\infty[$. La fonction racine carrée est donc $\frac{1}{2}$ -Lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

Exercice 7 (**)

1. Posons $g(x) = f(x) - x$. Puisque f n'admet pas de point fixe, g ne s'annule jamais sur \mathbb{R} . La fonction g étant continue puisque f l'est, elle est donc de signe constant (sinon le théorème des valeurs intermédiaires assurerait l'existence d'un réel annulant g). Supposons par exemple g toujours strictement positive, ce qui revient à dire que $f(x) > x$ pour tout réel. On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) > f(x) > x$, donc l'équation $f \circ f(x) = x$ ne peut pas avoir de solution. C'est exactement pareil si g est strictement négative, en retournant simplement le sens des inégalités strictes.
2. Posons $g(x) = f(x) - x$, la fonction g est continue puisque f l'est (étant Lipschitzienne). De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(0)| \leq k|x|$, donc, si $x \geq 0$, $f(0) - kx \leq f(x) \leq f(0) + kx$, ce qui implique $f(0) - (k+1)x \leq g(x) \leq f(0) + (k-1)x$. Cet encadrement, combiné avec le fait que $k-1 < 0$, suffit à prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (majoration par une fonction de limite $-\infty$), et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$. On montre de même que, si $x \leq 0$, on aura

$f(0) + (k-1)x \leq g(x) \leq f(0) - (k+1)x$, ce qui prouve cette fois-ci que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$. La définition des limites infinies assure en particulier qu'on peut trouver un réel a tel que $g(a) \geq 1 > 0$ et un réel b tel que $g(b) \leq -1 < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué entre ces deux valeurs donne alors l'existence d'un réel c tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire d'un point fixe de f . Reste à prouver que ce point fixe est unique, en supposant par l'absurde qu'il y en a deux. Si on les nomme x et y , l'hypothèse de Lipschitzianité donne alors $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$, c'est-à-dire $|y - x| \leq k|y - x|$ puisque x et y sont supposés être des points fixes. C'est fort gênant dans la mesure où on a supposé $k < 1$. L'hypothèse est donc absurde, le point fixe est unique.

Exercice 8 (***)

Dans le cas $n = 2$, on pose $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$. La fonction g est définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, continue puisque f est supposée continue, et $g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$ puisque $f(1) = f(0)$. L'intervalle $[g(0), g\left(\frac{1}{2}\right)]$ (dans ce sens ou dans l'autre, on ne sait pas lequel des deux est le plus grand) contient donc certainement 0, et le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un x tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$.

Le cas général se traite plus ou moins de la même façon : on pose $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$, g est continue sur $\left[0, \frac{n-1}{n}\right]$. Par ailleurs, $g(0) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)$, $g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$, ..., $g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)$. On constate que $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$ après un beau télescopage. Si la somme de ces n réels est nulle, il en existe nécessairement un positif (au sens large) et un négatif (au moins). On conclut comme précédemment : l'intervalle entre ces deux valeurs contient 0, donc 0 admet un antécédent par g , ce qui suffit à conclure.

Exercice 9 (***)

1. Appliquons la relation donnée à $f(x)$ (qui est un réel comme un autre) : $f(f(f(x))) = af(x) + b$. Par ailleurs, si on applique f aux deux membres de l'égalité de départ (avec x cette fois!), on a $f(f(f(x))) = f(ax + b)$. La comparaison des deux relations obtenues donne immédiatement $af(x) + b = f(ax + b)$. On dérive alors cette relation par rapport à x pour trouver $af'(x) = af'(ax + b)$, et on divise par a pour trouver l'égalité attendue (par hypothèse, $a \neq 0$).
2. On reconnaît ici une suite arithmético-géométrique, appliquons donc la méthode habituelle (de façon un peu plus formelle puisqu'on ne connaît pas les valeurs de a et de b) : $x = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{b}{1-a}$ (avec les hypothèses faites, $a \neq 1$, donc $1-a \neq 0$). On pose $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ et on vérifie que la suite (v_n) est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n - \frac{ba}{1-a} = av_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison a , elle a donc une limite nulle puisque $a \in]0, 1[$. On en déduit immédiatement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$.
3. La suite (u_n) construite dans la question 2 vérifiera toujours $f'(u_{n+1}) = f'(u_n)$. En posant $u_0 = x$, on aura donc toujours $f'(u_n) = f'(x)$. Or, d'après la question 2 et la continuité supposée de f' , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(u_n) = f'\left(\frac{b}{1-a}\right)$, ce qui prouve que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'\left(\frac{b}{1-a}\right)$. La fonction f' est donc constante, et f est une fonction affine, son expression est de la forme

$f(x) = cx + d$. Reportons dans l'équation de départ pour retrouver les solutions du problème : $f(f(x)) = cf(x) + d = c^2x + cd + d$, ce qui impose les conditions $x^2 = a$ et $d(c + 1) = b$. On a donc deux possibilités : $c = \sqrt{a}$ et $d = \frac{b}{1 + \sqrt{a}}$, soit $f(x) = \sqrt{ax} + \frac{b}{1 + \sqrt{a}}$, ou bien

$c = -\sqrt{a}$ et $d = \frac{b}{1 - \sqrt{a}}$ (on sait que $a \neq 1$, aucun problème d'existence possible pour d), soit $f(x) = -\sqrt{ax} + \frac{b}{1 - \sqrt{a}}$. Ces deux fonctions sont les seules solutions du problème.

4. Il faut essayer de se ramer au problème précédente : si $f(ax + b) = f(x)$, alors en posant $y = \frac{x - b}{a}$ (valeur qui n'a pas été choisie au hasard, elle correspond à la réciproque de la fonction affine $x \mapsto ax + b$) et en lui appliquant la relation, on obtient $f(y) = f\left(\frac{y}{a} - \frac{b}{a}\right)$, avec désormais $\frac{1}{a} \in]0, 1[$. On retrouve exactement les mêmes expression que si $a < 1$.

Exercice 10 (*)

Le principe est le même à chaque fois : la fonction étudiée est continue, et les signes des valeurs prises aux extrémités de l'intervalle sont opposés. Par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction s'annule sur l'intervalle.

1. Posons $f(x) = x^{2022} - x^{2021} + 1$, $f(-1) = 1 + 1 + 1 = 3$, et $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$, donc f n'a aucune raison de s'annuler sur I . En fait il faudrait mettre un 1 à droite et pas un -1 pour que ça marche (l'inconvénient de reprendre cet exercice chaque année en changeant uniquement les puissances...). Supposons donc plutôt que $f(x) = x^{2022} - x^{2021} - 1$, qui pour le coup s'annule sur I ($f(-1) = 1$ et $f(1) = -1$). Par dichotomie, on obtient successivement, en notant a la solution cherchée, $f(0) = -1$ donc $a \in [-1, 0]$, puis $f(-0.5) \simeq 1$ donc $a \in [-1, -0.5]$ etc. Il n'est pas très difficile de se convaincre que la valeur de a est extrêmement proche de -1 : $x^{2022} - x^{2021} = x^{2021}(x - 1)$, avec $x - 1 \in [-2, -1]$, donc x^{2021} doit être compris entre -0.5 et -1 pour que l'équation puisse être vérifiée, ce qui implique $0.5 \leq (-x)^{2021} \leq 1$, soit $\ln 0.5 \leq 2021 \ln(-x) \leq 0$, donc $e^{\frac{0.5}{2021}} \leq -x \leq 1$, soit $-x = 1$ à 0.001 près. On a donc $x \simeq -1$ à 0.001 près.
2. Posons $f(x) = \ln x - \frac{x^2 - 5}{x + 2}$, $f(1) = 0 - \frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$, et $f(10) = \ln 10 - \frac{95}{12} < 0$ (car par exemple $e^4 > 2^4 > 16$, donc $4 > \ln 10$, et $\frac{95}{12} > 4 > \ln 10$), donc f s'annule sur I . Plutôt que de couper exactement en 2, faisons une dichotomie avec des valeurs pas trop affreuses : $f(5) \simeq -1.24$, donc $a \in [1, 5]$, puis $f(3) \simeq 0.30$, donc $a \in [3, 5]$, $f(4) \simeq -0.44$ donc $a \in [3, 4]$, $f(3.5) \simeq -0.6$ donc $a \in [3, 3.5]$, $f(3.25) \simeq 0.12$ donc $a \in [3.25, 3.5]$, $f(3.375) \simeq 0.03$ donc $a \in [3.375, 3.5]$, $f(3.44) \simeq -0.02$ donc $a \in [3.375, 3.44]$, $f(3.41) \simeq 0.001$, donc $a \in [3.41, 3.44]$, et enfin $f(3.425) \simeq -0.001$ donc $a \in [3.41, 3.425]$. On a donc $a \simeq 3.42$ à 0.01 près.
3. Posons $f(x) = 3x - 1 - \ln(2 + x^2)$, $f(0) = 0 - 1 - \ln 2 < 0$ et $f(1) = 3 - 1 - \ln 3 = 2 - \ln 3 > 0$, car $e^2 > 3$, donc $\ln 3 < 2$. La fonction s'annule donc sur I . Toujours le même principe, je vais aller un peu plus vite : on calcule $f(0.5) \simeq -0.31$, puis $f(0.75) \simeq 0.31$, $f(0.625) \simeq 0.003$, $f(0.56) \simeq -0.16$, $f(0.59) \simeq -0.08$ et $f(0.61) \simeq -0.03$, dont on déduit que $a \simeq 0.62$ à 0.01 près. Constatons que quand on tombe au milieu des calculs sur une valeur très proche de 0, on a de bonnes chances d'être très près de la solution cherchée...
4. Posons $f(x) = e^x - 2 - x$, $f(\ln 2) = 2 - 2 - \ln 2 < 0$, et $f(2 \ln 2) = 4 - 2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$, donc f s'annule sur I . Ici, les bornes de l'intervalle sont moyennement pratiques, mais elles valent environ 0.7 et 1.4, ce qui permet de couper en 1 puis de prendre des valeurs plus rondes ensuite : $f(1) \simeq -0.28$, $f(1.2) \simeq 0.12$, $f(1.1) \simeq -0.10$, $f(1.15) \simeq 0.008$, $f(1.125) \simeq -0.04$, $f(1.14) \simeq -0.01$, donc $a \simeq 1.14$ à 0.01 près.

5. Posons $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Ça ne marche pas ? Si, car $f(0) = 1$, donc f s'annule en fait au moins deux fois sur I : une fois sur $[-1, 0]$ et une autre sur $[0, 1]$. Pour la dichotomie, contentons-nous de déterminer une valeur approchée de la solutions se trouvant dans $[0, 1]$ (on peut naturellement trouver également une approximation de la deuxième racine dont on connaît l'existence) : $f(0.5) = .375$, $f(0.75) \simeq -0.27$, $f(0.625) \simeq 0.07$, $f(0.69) \simeq -0.10$, $f(0.66) \simeq -0.02$, $f(0.64) \simeq 0.03$, donc $a \simeq 0.65$ à 0.01 près (pour les curieux, la racine appartenant à $[-1, 0]$ vaut environ -0.53).

Exercice 11 (***)

- La fonction f_n étant somme de deux fonctions strictement croissantes (et d'une constante) sur $[0, +\infty[$, elle l'est également. Comme de plus elle est continue, $f(0) = -4$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, le théorème de la bijection nous permet d'affirmer l'existence d'un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
- u_0 est solution positive de l'équation $1 + 9x^2 - 4 = 0$, soit $x^2 = \frac{1}{3}$, donc $u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pour $n = 1$, l'équation devient $9x^2 + x - 4 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 144 = 145$, et admet deux racines dont une strictement positive (d'après la question précédente) qui ne peut être que $u_1 = \frac{-1 + \sqrt{145}}{18} \simeq 0.61$. De même, u_2 est solution positive de l'équation $10x^2 = 4$, d'où $u_2 = \sqrt{\frac{2}{5}} \simeq 0.63$. Pour vérifier que $u_n < \frac{2}{3}$, il suffit de constater que $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9 \times \frac{4}{9} - 4 = \frac{2^n}{3^n} > 0$, et d'appliquer la croissance stricte de la fonction f_n à l'inégalité $0 = f_n(u_n) < f_n\left(\frac{2}{3}\right)$.
- On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 9x^2 - 4 - x^n - 9x^2 + 4 = x^n(x - 1)$. Cette expression étant négative si $x < 1$, on en déduit que $\forall x \in]0; 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
- On a notamment, puisque $0 < u_n < \frac{2}{3}$, $f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) = 0$. Comme par ailleurs $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, ce dont on déduit via stricte croissance de f_{n+1} que $u_n < u_{n+1}$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.
- La suite étant croissante et majorée par $\frac{2}{3}$, elle converge.
- Comme $0 < u_n < \frac{2}{3}$, $0 < u_n^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$, donc via le théorème des gendarmes (et le fait que le membre de droite est une suite géométrique de raison inférieure à 1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$). Or, on a par définition $u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$ (puisque $f_n(u_n) = 0$). On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 9u_n^2 - 4 = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = \frac{4}{9}$. Comme $u_n > 0$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

Exercice 12 (**)

- La fonction est somme de deux fonctions strictement croissantes, donc est strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, donc par théorème de la bijection, f est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- C'est une conséquence immédiate de la bijectivité de f .
- Par définition, $f(x_n) < f(x_{n+1})$, donc par stricte croissance de f , $x_n < x_{n+1}$, et la suite (x_n) est strictement croissante.

4. C'est un calcul d'images : $f(\ln n) = e^{\ln n} + \ln n = n + \ln n \geq n$ si $n \geq 1$, donc on a $f(x_n) \leq f(\ln n)$, d'où $x_n \leq \ln n$. De même, $f(\ln(n - \ln n)) = e^{\ln(n - \ln n)} + \ln(n - \ln n) = n - \ln n + \ln(n - \ln n) = n - \ln \frac{n}{n - \ln n} < n$ puisque $\frac{n}{n - \ln n} < 1$. On en déduit de même que $\ln(n - \ln n) \leq x_n$.
5. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \ln n = +\infty$ (croissance comparée), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n - \ln n) = +\infty$, d'où par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. De plus, $\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} \leq \frac{x_n}{\ln n} \leq 1$, avec $\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1 - \frac{\ln n}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1 - \frac{\ln n}{n})}{\ln n}$. La quotient a pour limite 0, donc la suite $(\frac{x_n}{\ln n})$ est encadrée par deux suites de limite 1. Via le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\ln(n)} = 1$.

Exercice 13 (**)

- Calculons donc la dérivée $f'_n(x) = 5x^4 + n$. Cette dérivée est toujours strictement positive (sauf en 0 pour $n = 0$), la fonction est donc strictement croissante, quel que soit l'entier n .
- Comme de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, chaque fonction f_n est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Chaque réel a donc un unique antécédent par f_n et en particulier l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution.
- Constatons que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} + 1 - 1 = \frac{1}{n^5} > 0$. Comme la fonction f_n est strictement croissante, et $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que $u_n < \frac{1}{n}$. Notons par ailleurs que $f_n(0) = -1$, donc par un raisonnement similaire on a toujours $0 < u_n$. Le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration subsidiaire : monotonie de la suite (u_n) . Pour déterminer la monotonie de la suite (u_n) , il faut réussir à comparer u_n et u_{n+1} . Pour cela, dans le même esprit que les calculs précédents, on va chercher à calculer $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$. Le morceau facile, c'est $f_n(u_n) = 0$ (par définition). Plus compliqué, $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1$. Or, on sait que, par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1}^5 + (n+1)u_{n+1} - 1 = 0$, ou encore en développant $u_{n+1}^5 + nu_{n+1} + u_{n+1} - 1 = 0$, soit $u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1 = -u_{n+1}$. Autrement dit, en reprenant le calcul précédent, $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1} < 0$ (puisque on a prouvé plus haut que tous les termes de la suite étaient positifs). En particulier, $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$. La fonction f_n étant strictement croissante, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.

- On sait que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^5 = 0$ (puisque la suite (u_n) tend vers 0), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$.

Exercice 14 (***)

- Sur \mathbb{R}^{+*} , les fonctions f_n sont strictement croissantes comme sommes de fonctions croissantes. De plus, $f_n(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. La fonction f_n effectue donc une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur $[1; +\infty[$, et en particulier 2 admet un unique antécédent par f_n , que l'on peut donc noter u_n .
- On a déjà vu que $f_n(0) = 1$, donc $u_n > 0$, et $f_n(1) = n + 1 > f_n(u_n)$ si $n \geq 2$. Par croissance de la fonction f_n , on a donc bien $u_n < 1$.
- On peut utiliser la méthode classique : $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1}$, donc $f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + u_n^{n+1} = 2 + u_n^{n+1}$. Comme $u_n > 0$, $u_n^{n+1} > 0$, et $f_{n+1}(u_n) > 2 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Par croissance de la fonction f_{n+1} , on déduit que $u_n > u_{n+1}$, et la suite est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge.

4. Nos connaissances sur les suites géométriques nous permettent d'affirmer que, $\forall x \neq 1$, $f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. En particulier, $\frac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n} = 2$. Or, comme la suite (u_n) est décroissante, on aura $\forall n \geq 2$, $u_n \leq u_2 < 1$, donc $0 < u_n^{n+1} < u_2^{n+1}$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{n+1} = 0$. Une petite application du théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{n+1} = 0$. En passant à la limite la relation obtenue ci-dessus, et en notant l la limite inconnue de la suite (u_n) , on trouve alors $\frac{1}{1-l} = 2$, soit $1-l = \frac{1}{2}$ et $l = \frac{1}{2}$. On a prouvé que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
5. Je vois venir d'ici ceux qui se sont lancés dans une récurrence inutile pour cette question. Reprenons donc les calculs des questions précédentes : $\frac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n} = 2$, donc $1-u_n^{n+1} = 2-2u_n$, ou encore $u_n^{n+1} = 2u_n - 1$. Comme $v_n + \frac{1}{2} = u_n$, cela revient à dire que $\left(\frac{1}{2} + v_n\right)^{n+1} = 2v_n$.

Exercice 15 (**)

- Inutile de calculer la moindre dérivée, on sait que l'exponentielle est croissante que la fonction $x \mapsto \frac{1}{nx}$ est décroissante, donc g_n est croissante sur $]0, +\infty[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} g_n(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$ (aucune forme indéterminée), et la fonction g_n est bien sûr continue, elle est donc bijective de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} et en particulier s'annule une seule fois sur cet intervalle.
- L'inégalité $u_n > 0$ est évidente. De plus, $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$, puisque $e^{\frac{1}{n}} > e^0 = 1$. La fonction g_n étant strictement croissante, on en déduit que $u_n < \frac{1}{n}$. Une application immédiate du théorème des gendarmes donne alors $\lim u_n = 0$.
- On calcule donc $g_{n+1}(x) - g_n(x) = e^x - \frac{1}{(n+1)x} - e^x + \frac{1}{nx} = \frac{-n+n+1}{n(n+1)x} = \frac{1}{n(n+1)x} > 0$. Cette expression est manifestement positive sur notre intervalle, ce qui implique que $g_{n+1}(u_{n+1}) - g_n(u_{n+1}) > 0$. Comme $g_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ par définition de la suite, on a donc $g_n(u_{n+1}) < 0$, et en particulier $g_n(u_{n+1}) < g_n(u_n)$. La fonction g_n étant toujours croissante, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, et la suite (u_n) est donc décroissante.
- Par définition, $g_n(u_n) = 0$, donc $e^{u_n} - \frac{1}{nu_n} = 0$. Autrement dit, $nu_n = \frac{1}{e^{u_n} - 1}$. Comme on sait que la suite (u_n) tend vers 0, on en déduit immédiatement que $\lim nu_n = 1$.

Exercice 16 (***)

- Par définition, u_1 est solution positive de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, et admet donc pour solutions $x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$ (on oublie donc) et $x_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. Puisque $u_1 > 0$, on a donc $u_1 = 1 + \sqrt{2}$.
- La fonction f_n étant polynomiale, elle est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $f'_n(x) = n(n+1)x^n - (n+1)nx^{n-1} = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$. Comme $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = n - (n+1) = -1$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
f_n	0	-1	$+\infty$

La fonction f_n ne prend que des valeurs négatives sur l'intervalle $[0, 1]$, l'équation $f_n(x) = 1$ ne peut pas y avoir de solution. Sur $[1, +\infty[$, f_n est croissante et continue, donc bijective vers son intervalle image $[-1, +\infty[$. Comme 1 appartient à cet intervalle image, l'équation $f_n(x) = 1$ admet donc une unique solution sur $[1, +\infty[$, et par conséquent sur $[0, +\infty[$.

3. Pour montrer un tel encadrement, on calcule les images des encadrants par f_n : $f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} - \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = 0$; et $f_n\left(1 + \frac{2}{n}\right) = n\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{n+2}{n}\right)^n = (n+2)\left(\frac{n+2}{n}\right)^n - (n+1)\left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n > 1$. Comme $f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < f_n\left(1 + \frac{2}{n}\right)$, la croissance de f_n sur l'intervalle $[1, +\infty[$ (intervalle auquel appartiennent $1 + \frac{1}{n}$, u_n et $1 + \frac{2}{n}$) assure que $1 + \frac{1}{n} < u_n < 1 + \frac{2}{n}$. Le théorème des gendarmes permet alors de dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
4. On commence par écrire $v_n = e^{n \ln(1 + \frac{\beta}{n})}$ pour se rendre compte qu'il y a une forme indéterminée si jamais ça ne nous frappe pas sous la forme initiale. On peut ensuite poser $x = \frac{\beta}{n}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta}{n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite classique issue d'un taux d'accroissement), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln(1 + \frac{\beta}{n})}{\beta} = 1$. Ce qui se trouve dans notre exponentielle a donc pour limite β , et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^\beta$.
5. On écrit $f_n\left(1 + \frac{\beta}{n}\right) = n\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^{n+1} - (n+1)\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^n = (n+\beta)\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^n - (n+1)\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^n = (\beta-1)v_n$. D'après la question précédente, notre suite converge donc vers $(\beta-1)e^\beta$.
6. Posons donc $g(x) = (x-1)e^x$, la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$. Cette dérivée est du signe de x , on calcule donc $g(0) = -e^0 = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ (croissance comparée classique), et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, pour dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	0	-1	$+\infty$

On conclut comme à la question 2 : la fonction g ne peut pas prendre la valeur 1 sur $] -\infty, 0]$, puis elle est bijective de $[0, +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution. Comme de plus $g(1) = 0 < 1$ et $g(2) = e^2 > 1$, la croissance de g sur $[0, +\infty[$ assure que $1 < \alpha < 2$.

7. (a) Il suffit de recopier le résultat de la question 4 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\left(1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{n}\right) = (\alpha - \varepsilon - 1)e^{\alpha - \varepsilon}$
 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\left(1 + \frac{\alpha + \varepsilon}{n}\right) = (\alpha + \varepsilon - 1)e^{\alpha + \varepsilon}$.
- (b) Par hypothèse, $1 < \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon$, donc $g(\alpha - \varepsilon) < g(\alpha) < g(\alpha + \varepsilon)$ (par croissance de la fonction g étudiée plus haut sur $[1, +\infty[$). On en déduit que les deux limites calculées à la question précédente sont respectivement strictement inférieure à 1 et strictement supérieure à 1. Mais, en appliquant la définition de la limite, une suite qui a une limite

strictement inférieure à 1 prend nécessairement des valeurs inférieures ou égales à 1 à partir d'un certain rang (on note cette limite $1 - \eta$, avec $\eta > 0$, et on applique la définition de la limite à ce η). À partir d'un certain rang, on aura donc nécessairement $f_n \left(1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{n} \right) \leq 1 = f_n(u_n)$, ce qui implique $1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{n} \leq u_n$ par croissance de f_n sur $[1, +\infty[$, intervalle auquel appartiennent bien nos deux valeurs. On montre la deuxième inégalité de la même façon, et on en déduit un entier n_0 (le maximum des deux entiers obtenus pour chaque inégalité) à partir duquel l'encadrement souhaité sera vérifié.

- (c) On constate déjà que $1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{\alpha + \varepsilon}{n} \Leftrightarrow \frac{\alpha - \varepsilon}{n} \leq u_n - 1 \leq \frac{\alpha + \varepsilon}{n} \Leftrightarrow \alpha - \varepsilon \leq n(u_n - 1) \leq \alpha + \varepsilon$. D'après la question précédente, on peut alors dire que, $\forall \varepsilon \in]0, \alpha - 1[$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\alpha - \varepsilon \leq n(u_n - 1) \leq \alpha + \varepsilon$. C'est exactement la définition de la limite, qui permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_n - 1) = \alpha$.

Exercice 17 (***)

- C'est complètement évident, on fixe une valeur de x et on applique la définition de la convergence uniforme pour constater qu'on retombe sur la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$. En fait, tout ce qu'on rajoute dans la convergence uniforme, c'est qu'une fois la valeur de ε fixée, le n_0 de la définition doit être le même pour toutes les valeurs de x , ce qui n'a aucune raison de se produire en général! Un contre-exemple simple à la réciproque : on se place sur $I =]0, 1[$ et on pose $f_n(x) = 1$ si $x < \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 0$ sinon. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle puisque, à x fixé, on trouvera toujours un n_0 à partir duquel $x \geq \frac{1}{n}$, et à partir de cette valeur, on aura tout simplement $f_n(x) = 0$. Pourtant, la convergence n'est pas uniforme puisque l'écart maximal entre la limite 0 et la fonction f_n vaut toujours 1 (atteint sur tout l'intervalle $]0, \frac{1}{n}[$), ce qui contredit par exemple à la définition de convergence uniforme pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
- C'est un classique « tronçonnage d' ε » : fixons $a \in I$ et commençons par appliquer la définition de la convergence uniforme : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. La fonction f_{n_0} étant par ailleurs continue en a , $\exists \eta > 0$, $x \in]a - \eta, a + \eta[\Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Mais alors, pour ces mêmes valeurs de x , on peut écrire $|f(x) - f(a)| = |(f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)) + (f_{n_0}(a) - f(a))| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ par simple application de l'inégalité triangulaire. On a bien prouvé que f était continue en a .

Pour un contre-exemple, pas besoin de chercher compliqué : posons $f_n(x) = x^n$ et plaçons-nous sur l'intervalle $[0, 1]$. Si $x = 1$ on aura toujours $f_n(x) = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = 1$. Mais si $0 \leq x < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge donc vers la fonction discontinue f définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$, et $f(1) = 1$. Pourtant, toutes les fonctions f_n sont indiscutablement continues sur $[0, 1]$.