Feuille d'exercices n° 10 : Continuité

MPSI Lycée Camille Jullian

14 décembre 2023

Exercice 1 (* à ***)

Calculer les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^3-4x^2+x-2}{x^2-4}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1}-x\sqrt{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{Ent}(x)}{\sqrt{|x|}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}(x)}{e^x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x\sin(e^{-x})$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{Ent}\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos(x)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{x+1}-(x+1)^x$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x+1)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x+x^2-1)}{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)}$

Exercice 2 (** à ***)

Étudier la continuité et les possibilités de prolongement par continuité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1-x}{1-x^2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x^2\ln(x)}{\sin(x)}$
4. $f_4(x) = \mathrm{Ent}(x)+\sqrt{x-\mathrm{Ent}(x)}$
5. $f_5(x) = \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{(x-1)^2}$
6. $f_6(x) = e^{\frac{1}{1-x}}+2x-3$
7. $f_7(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$
8. $f_8(x) = x\,\mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
9. $f_9(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n!}$

Exercice 3 (***)

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x>0$, et $f(x)=0$ si $x\leqslant 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée et montrer qu'elle est aussi continue. Faire de même avec la dérivée seconde. Pour les motivés : prouver que, quel que soit l'entier $n\in\mathbb{N}$, la dérivée n-ème de la fonction f est continue.

Exercice 4 (** à ***)

Déterminer toutes les fonctions vérifiant les conditions suivantes :

1. f est continue en 0 et en 1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x^2)$.
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = f(x)$.
3. f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)\cos(x)$.
4. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(y))$ (on commencera par prouver que, si $f(0) = f(1) = 0$, f est périodique, et nulle).
5. f est continue en 0 et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{3}\right) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(y))$.
6. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$ (pour ce grand classique, on commencera par donner des informations sur les images par f des entiers naturels, puis relatifs, puis des rationnels avant de conclure).

Exercice 5 (*)

Montrer que les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 6 (**)

1. Montrer que, si la fonction racine carrée était k-Lipschitzienne sur $[0, +\infty[$, on aurait $0 \leqslant x < y \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant \dfrac{1}{k}$. En déduire l'absurdité de cette hypothèse.
2. Montrer par contre que la fonction racine carrée est Lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

Exercice 7 (**)

Deux questions complètement indépendantes faisant intervenir des histoires de points fixes :

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ n'admettant aucun point fixe. Montrer que $f \circ f$ n'admet pas non plus de point fixe.
2. Montrer qu'une fonction k-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ avec $k < 1$ admet un unique point fixe.

Exercice 8 (***)

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un réel x tel que $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(x)$. Généraliser en prouvant qu'on peut toujours trouver un x tel que $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = f(x)$, pour tout entier $n \geqslant 2$.

Exercice 9 (***)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = ax + b$, où $a \in]0,1[$ et b sont deux réels fixés.

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(ax+b) = af(x) + b$. En déduire que $f'(ax+b) = f'(x)$.
2. Montrer que tout suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ converge vers une limite à préciser.
3. Déduire des deux questions précédentes que f' est constante, et déterminer toutes les fonctions f solutions du problème.
4. Résoudre le même problème dans le cas où $a > 1$.

Exercice 10 (*)

Montrer que chacune des équations suivantes admet une solution sur l'intervalle I considéré.

1. $x^{2022} - x^{2021} = -1$ sur $I = [-1, 1]$.
2. $\ln x = \dfrac{x^2 - 5}{x + 2}$ sur $I = [1, 10]$.
3. $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$ sur $I = [0, 1]$.
4. $e^x = 2 + x$ sur $[\ln 2, 2\ln 2]$.
5. $x^3 - 3x^2 = -1$ sur $I = [-1, 1]$.

Déterminer par dichotomie (et en utilisant la calculatrice !) une valeur approchée à 0.01 d'une solution de chaque équation.

Exercice 11 (***)

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une seule solution strictement positive, qu'on notera désormais u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 et vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0; \dfrac{2}{3}\right[$.
3. Montrer que, $\forall x \in]0, 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. Que peut-on en déduire concernant la suite (u_n) ?
5. Montrer que (u_n) est convergente vers une limite qu'on notera l.
6. Déterminer la limite de u_n^n et en déduire la valeur de l.

Exercice 12 (**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.
3. Déterminer la monotonie de la suite (x_n).
4. Démontrer que $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n - \ln n) \leqslant x_n \leqslant \ln n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis celle de $\dfrac{x_n}{\ln(n)}$.

Exercice 13 (**)

On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Étudier les variations de f_n.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n).
4. Montrer que (nu_n) admet une limite finie, que l'on précisera.

Exercice 14 (***)

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution qu'on notera u_n.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $u_n \in]0; 1[$.
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et en déduire sa convergence.
4. Calculer la limite de la suite (on pourra commencer par prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$).
5. En posant $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$, montrer que $\left(\dfrac{1}{2} + v_n\right)^{n+1} = 2v_n$.

Exercice 15 (**)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction g_n par $g_n(x) = e^x - \dfrac{1}{nx}$.

1. Étudier les variations de la fonction g_n sur l'intervalle $]0; +\infty[$, et prouver que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une seule solution sur cet intervalle, que l'on notera désormais u_n.
2. Montrer que $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).
3. Simplifier l'expression $g_{n+1}(x) - g_n(x)$, et en déduire le signe de $g_n(u_{n+1})$ puis la monotonie de la suite (u_n).
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n$.

Exercice 16 (***)

On cherche dans cet exercice à étudier le comportement de la suite (u_n) définie de la façon suivante : u_n est l'unique solution positive de l'équation $nx^{n+1} - (n+1)x^n = 1$. On posera à cet effet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n$.

1. Déterminer la valeur de u_1.
2. Effectuer l'étude de la fonction f_n sur $]0, +\infty[$, et en déduire l'existence d'une unique solution à l'équation $f_n(x) = 1$ sur cet intervalle.
3. Montrer l'encadrement $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{2}{n}$. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
4. Soit $\beta \in \mathbb{R}$, montrer que la suite définie par $v_n = \left(1 + \dfrac{\beta}{n}\right)^n$ converge, et préciser sa limite.
5. En déduire que la suite $\left(f_n\left(1 + \dfrac{\beta}{n}\right)\right)$ converge vers une limite à préciser.
6. Montrer que l'équation $(x-1)e^x = 1$ admet une solution unique que l'on notera α, puis prouver que $\alpha \in]1, 2[$.
7. Soit un réel ε tel que $0 < \varepsilon < \alpha - 1$.
   (a) Que valent les limites $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n\left(1 + \dfrac{\alpha - \varepsilon}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n\left(1 + \dfrac{\alpha + \varepsilon}{n}\right)$?
   (b) Prouver qu'il existe un entier n_0 à partir duquel on a l'encadrement $1 + \dfrac{\alpha - \varepsilon}{n} \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{\alpha + \varepsilon}{n}$.
   (c) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} n(u_n - 1)$.

Exercice 17 (***)

Un petit aperçu de notions que vous étudierez l'an prochain : soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un même intervalle I. On dit que :

- la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f si $\forall x \in I$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.
- la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ (autrement dit, l'écart maximal entre $f_n(x)$ et $f(x)$ tend vers 0).

1. Montrer que, si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge simplement vers f. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que, si les fonctions f_n sont toutes continues sur I, leur limite f le sera également si la convergence est **uniforme**. Donner un contre-exemple dans le cas d'une convergence simple.