Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 8 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

28 novembre 2023

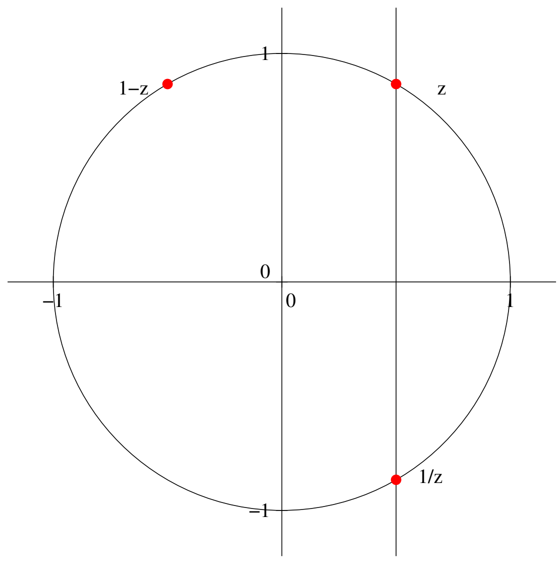
Exercice 1 (*)

- Directement en développant, $(1+2i)^3 = 1+6i-12-8i = -2i-11$. On ne risque pas de mettre ce nombre sous une forme exponentielle simple. Si on tient vraiment à essayer de le faire, autant mettre simplement $1+2i$ sous forme exponentielle : $|1+2i| = \sqrt{5}$, donc $1+2i = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i\right) = \sqrt{5}e^{i\arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})}$. On en déduit que $(1+2i)^3 = 5\sqrt{5}e^{3i\arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})}$.
- En mutipliant par le conjugué, $\frac{4}{1-i} = \frac{4+4i}{2} = 2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- $\frac{(2+i)^2(1-i)}{4+i} = \frac{(3+4i)(1-i)(4-i)}{17} = \frac{(3+4i)(3-5i)}{17} = \frac{29-3i}{17}$. La encore, pas de forme exponentielle évidente. Si on tient à en donner une, mieux vaut utiliser un arcsin qu'un arccos puisque l'argument sera compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 (partie imaginaire négative, mais partie réelle positive).
- En additionnant 10π à l'argument, c'est-à-dire $\frac{40\pi}{4}$, $e^{-i\frac{37\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
- $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- Ici, on a intérêt à mettre sous forme exponentielle : $|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$, donc $z_4 = \left(2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{11} = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{11} = 2^{11}e^{-\frac{11\pi}{3}} = 2048\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1024 + 1024\sqrt{3}i$.
- Le boulot a déjà été mâché : $(2e^{i\frac{\pi}{3}})^5 = 2^5e^{i\frac{5\pi}{3}} = 16 - 16\sqrt{3}i$.
- Commençons par simplifier ce qui se trouve à l'intérieur de la parenthèse : $\frac{2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i}{2-i} = \frac{(2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i)(2+i)}{4+1} = \frac{4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1+(4\sqrt{3}-2+2+\sqrt{3})i}{5} = 1+\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc élevé à la puissance 17 on obtient $2^{17}e^{i\frac{17\pi}{3}} = 2^{17}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2^{16} - 2^{16}\sqrt{3}i = 65\ 536 - 65\ 536\sqrt{3}i$.
- Pas vraiment de souci avec une exponentielle quelconque : $e^{(1+i)\ln(3)} = e^{\ln(3)}e^{i\ln(3)} = 3e^{i\ln(3)} = 3\cos(\ln(3)) + 3i\sin(\ln(3))$.

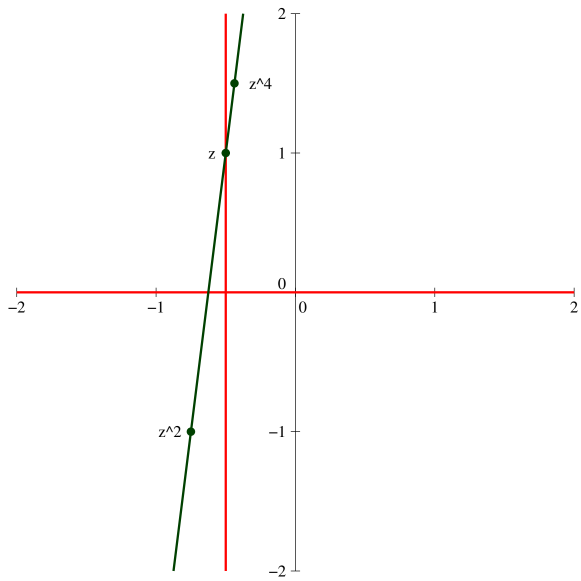
Exercice 2 (**)

1. On a $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z \in \mathbb{U}$. De plus, si $|z| = |z-1|$, on obtient en élevant le tout au carré $z\overline{z} = (z-1)(\overline{z}-1) = z\overline{z} - z - \overline{z} + 1$, ce qui donne après simplification $z + \overline{z} = 1$, soit $\text{Re}\,(z) = \frac{1}{2}$. Les deux seuls points du cercle trigonométrique ayant pour abscisse $\frac{1}{2}$ sont $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, qui sont donc les deux solutions du problèmes posé.
   Une autre façon de résoudre la deuxième équation est l'interprétation géométrique : $|z| = |1-z|$ signifie que la distance entre le point M d'affixe z et l'origine O du repère est la même que la

distance entre M et le point A d'affixe 1. Autrement dit, le point M se trouve sur la médiatrice du segment $[OA]$, qui est bien la droite d'équation $\text{Re}\,(z) = \frac{1}{2}$. Un schéma avec uniquement la solution $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$:

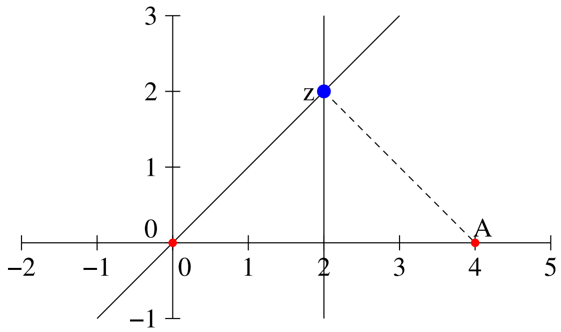


2. On peut traduire l'hypothèse par le fait que $\dfrac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbb{R}$ (si $z = 0$ ou $z = 1$, valeurs pour lesquelles le quotient n'est pas défini, les points seront de toute façon alignés puisque confondus). On a donc $\dfrac{z^2(z+1)(z-1)}{z(z-1)} = z(z+1) \in \mathbb{R}$. Posons $z = a + ib$, on a alors $z(z+1) = a^2 + a - b^2 + i(2ba + b)$. On obtient donc la condition $b(2a+1) = 0$, soit $b = 0$ ou $a = -\dfrac{1}{2}$. L'ensemble recherché est donc la réunion de la droite réelle et de la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ (ou en terme de complexes l'ensemble des complexes réels ou de partie réelle égale à $-\dfrac{1}{2}$). Il est ici difficile de faire une résolution purement géométrique de ce problème. Une solution surlignée sur la figure ci-dessous, correspondant à $z = -\dfrac{1}{2} + i$.

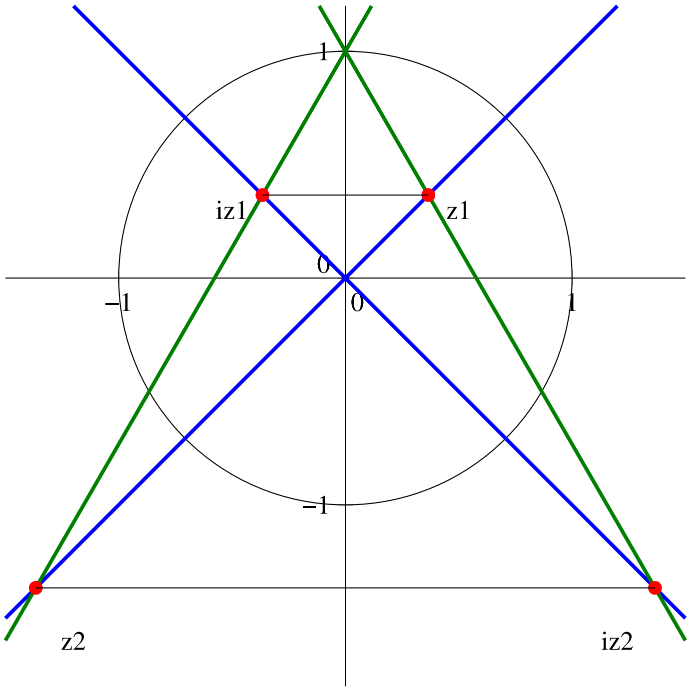


3. On peut s'en sortir uniquement par le calcul : si $|z| = |z-4|$, en élevant au carré, on obtient $z\overline{z} = (z-4)(\overline{z}-4) = z\overline{z} - 4(z+\overline{z}) + 16$, donc $16 = 4(z+\overline{z}) = 8\text{Re } z$, et $\text{Re } z = 2$. Ensuite, en supposant $z \neq 0$, $\arg z = \arg(z+1+i) \Leftrightarrow \arg \dfrac{z+1+i}{z} = 0$, donc $\dfrac{z+1+i}{z} = \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+$, soit $z+1+i = \lambda z \Leftrightarrow z = \dfrac{1+i}{\lambda - 1}$. Le seul multiple réel de $1+i$ ayant pour partie réelle 2 étant $2(1+i) = 2+2i$ (qui correspond à $\lambda = \dfrac{3}{2}$), la seule valeur de z convenable est donc $2+2i$.

   Il est également possible de raisonner géométriquement. Notons M l'image de z dans le plan complexe, et A celle de 4, alors la condition $|z| = |z-4|$ peut s'écrire sous la forme $|z_M - z_O| = |z_M - z_A| \Leftrightarrow AM = OM$. Le point M doit donc appartenir à la médiatrice du segment $[OM]$, c'est-à-dire la droite d'équation $x = 2$ dans le plan. De plus deux nombres complexes ont même argument si leurs images sont situées sur une même demi-droite d'origine 0. Ici, l'image de $z+1+i$ étant l'image de M par la translation de vecteur d'affixe $1+i$, il ne peut être aligné avec O et M que si le vecteur d'affixe $1+i$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OM}$, donc M se situe sur la droite passant par le point d'affixe $1+i$. Cette droite intersecte celle d'équation $x = 2$ en un seul point, d'affixe $2+2i$, qui est donc l'unique solution du problème posé.

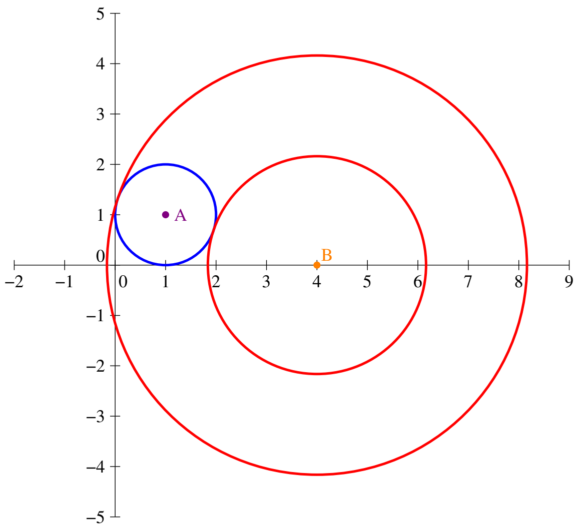


4. Les trois points forment un triangle équilatéral si et seulement si $\dfrac{z-i}{iz-i} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{z-i}{iz-i} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Dans le premier cas, on obtient $z - i = ize^{i\frac{\pi}{3}} - ie^{i\frac{\pi}{3}}$, soit $z = i\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-ie^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{5\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}} \times (-2i\sin\frac{\pi}{6})}{e^{i\frac{5\pi}{12}} \times (-2i\sin\frac{5\pi}{12})} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sin\frac{5\pi}{12}}$ et dans le deuxième $z - i = ize^{-i\frac{\pi}{3}} - ie^{-i\frac{\pi}{3}}$, soit $z = i\dfrac{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1-ie^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 2i\sin\frac{\pi}{6}}{e^{i\frac{\pi}{12}} \times (-2i\sin\frac{\pi}{12})} = -\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sin\frac{\pi}{12}}$. Un petit dessin pour voir où tout ça se situe :



On peut en fait résoudre ce problème très géométriquement, je vous ai mis la figure d'abord pour que vous puissiez mieux suivre. Quel que soit le nombre complexe z, le triangle formé par les images de 0, z et iz est isocèle rectangle en 0 (en effet, iz a même module que z, et un argument augmenté de $\frac{\pi}{2}$). Il s'agit donc de coller ensemble un triangle isocèle rectangle et un équilatéral ayant un côté commun avec l'hypothénuse du rectangle isocèle. Dans cette construction, la médiatrice du segment reliant z et iz est donc commune avec la droite remarquable issue de i dans le triangle équilatéral. Comme cette médiatrice passe par 0, elle doit donc être confondue avec l'axe imaginaire. Cela implique que z se situe sur une des deux bissectrices des deux Axes (en bleu sur le dessin). De plus, l'angle formé par la droite reliant i et z devra être égal à $\pm\frac{\pi}{6}$ (l'axe imaginaire étant bissectrice d'un angle de $\frac{\pi}{3}$ dans le triangle équilatéral). Les deux droites correspondantes sont en vert sur la figure, il ne reste plus qu'à prendre les points d'intersection des droites bleues et vertes pour obtenir les points correspondant à z et iz. On peut ensuite faire des calculs trigonométriques savants pour retrouver les affixes exactes de ces points.

5. Supposons donc $|z - 1 - i| \leqslant 1$. On peut alors tout simplement appliquer l'inégalité triangulaire : $z - 4 = (z - 1 - i) + (i - 3)$, donc $|z - 4| \leqslant |z - 1 - i| + |i - 3| \leqslant 1 + \sqrt{10}$. Dans l'autre sens, c'est aussi l'inégalité triangulaire : $z - 4 = (z - 1 - i) - (3 - i)$, donc $|z - 4| \geqslant ||z - 1 - i| - |3 - i|| \geqslant \sqrt{10} - 1$. Ce résultat se traduit assez simplement géométriquement : le cercle de centre $A(1 + i)$ et de rayon 1 est intégralement inclus dans la couronne circulaire comprise entre les deux cercles de centre $B(4)$ et de rayons respectifs $\sqrt{10} - 1$ et $\sqrt{10} + 1$. On peut le voir sur le schéma ci-dessous :



En fait, le schéma montre assez clairement que le cercle de centre A est même tangent aux deux cercles de la couronne. Et c'est très facile à prouver : la distance AB est égale à $|4-(1+i)| = \sqrt{10}$, donc les cercles centrés en A et B de rayons respectifs 1 et $\sqrt{10}-1$ sont tangents intérieurement (la somme des rayons est égale à la distance entre les centres), et les cercles de rayons respectifs 1 et $\sqrt{10}+1$ sont tangents extérieurement ((différence des rayons égale à la distance entre les centres). Cela suffit à prouver que le disque est inclus dans la couronne (je vous laisse méditer cette conclusion si vous n'êtes pas convaincus).

Exercice 3 (* à ***)

1. Cette équation à coefficients réels se résout comme vous aviez l'habitude de le faire en Terminale : $\Delta = 4-20 = -16 = (4i)^2$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$, et $z_2 = 1+2i$.
2. On applique la méthode générale vue en cours : $\Delta = (2-3i)^2 - 4i(5i-5) = 4-9-12i+20+20i = 15+8i$. On cherche à déterminer les racines carrées du discriminant, posons $\delta = a+ib$, la condition $\delta^2 = \Delta$ donne en isolant partie réelle et imaginaire les équations $a^2-b^2 = 15$ et $2ab = 8$. On ajoute la condition sur le module : $|\delta|^2 = a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$. En combinant la première et la troisième équation, on a donc $2a^2 = 15+17 = 32$, donc $a = \pm 4$, et $2b^2 = 17-15 = 2$, soit $b = \pm 1$. Comme a et b sont de même signe à cause de l'équation $2ab = 8$, on peut choisir $\delta = 4+i$ ou $\delta = -4-i$. On obtient alors pour l'équation initiale les deux solutions $z_1 = \dfrac{-2+3i+4+i}{2i} = \dfrac{2+4i}{2i} = 2-i$, et $z_2 = \dfrac{-2+3i-4-i}{2i} = \dfrac{-6+2i}{2i} = 1+3i$.
3. Cette fois-ci, le discriminant vaut $\Delta = i^2 - 8(1-i) = 8i-9$. En recherchant un $\delta = a+ib$ vérifiant $\delta^2 = \Delta$, on obtient les équations $a^2-b^2 = -9$ et $2ab = 8$. De plus, la condition sur le module revient à dire que $a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{81+64} = \sqrt{145}$ (non, ça ne se simplifie pas). Tout cela nous donne $2a^2 = \sqrt{145}-9$ et $2b^2 = \sqrt{145}+9$. Comme a et b doivent par ailleurs être de même signe, on peut choisir $\delta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{145}-9}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{145}+9}{2}}$. Les solutions de l'équation initiale sont donc $z_1 = \dfrac{-i+\delta}{4}$ et $z_2 = \dfrac{-i-\delta}{4}$, tenter de les écrire entièrement n'a aucun intérêt, on ne simplifiera rien de toute façon.
4. En multipliant par z^2, on obtient $z^4 = -|z|^4$. Un nombre complexe est égal à l'opposé de son module si et seulement si il est réel négatif, donc $z^4 \in \mathbb{R}^-$, ou encore $\arg(z^4) \equiv \pi[2\pi]$, d'où

$\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$. L'ensemble des solutions est la réunion des deux bissectrices des axes dans le plan complexe.

On peut également résoudre plus brutalement en posant $z = a+ib$, on obtient alors $(a+ib)^2 = -(a-ib)^2$, soit $a^2 - b^2 + 2iab = -(a^2 - b^2 - 2iab)$, soit $2(a^2 - b^2) = 0$. On retrouve les deux possibilités $a = b$ et $a = -b$ qui correspondent aux deux bissectrices.

Dernière méthode revenant au même calcul que la première : on constate que 0 est solution évidente au problème, et on écrit z sous forme exponentielle. On trouve $r^2e^{2i\theta} = -r^2e^{-2i\theta} = r^2e^{-2i\theta+\pi}$. L'égalité des modules est toujours vérifiée, celle des arguments donne la condition $2\theta \equiv -2\theta + \pi[2\pi]$, soit $4\theta \equiv \pi[2\pi]$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$. On retrouve encore une fois les deux bissectrices des axes.

5. Deux méthodes : on pose $Z = z^2$ puis on résout l'équation de degré 2, dont le discriminant vaut $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta) = (2i\sin(\theta))^2$, et on obtient les solutions $Z_1 = \frac{2\cos(\theta) + 2i\sin(\theta)}{2} = e^{i\theta}$, et $Z_2 = e^{-i\theta}$. On peut aussi remarquee que l'équation s'écrit $z^4 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z^2 + e^{i\theta}e^{-i\theta} = 0$, équation de type « somme-produit », et on en déduit que $Z_1 = e^{i\theta}$ ou $Z_2 = e^{-i\theta}$. Dans les deux cas, les valeurs possibles pour z sont les racines carrées de $e^{i\theta}$ et de $e^{-i\theta}$, c'est-à-dire que $\mathcal{S} = \{e^{i\frac{\theta}{2}}, -e^{i\frac{\theta}{2}}, e^{-i\frac{\theta}{2}}, -e^{-i\frac{\theta}{2}}\}$. Notons tout de même des cas particulier où il n'y a en fait pas quatre solutions disctinctes. Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, on n'a que les deux solutions 1 et -1, ce qui est logique puisque dans ce cas l'équation peut se factoriser sous la forme $(z^2 - 1)^2 = 0$. Autre cas particulier, $\theta \equiv \pi[2\pi]$, ou on a pour seules solutions i et $-i$, puisque dans ce cas on a la factorisation $(z^2 + 1)^2 = 0$.

6. On peut ruser en remarquant que $-5|z^2| + 2$ est un réel, donc z^2 soit être réel. Celà ne se produit que si $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in i\mathbb{R}$. Dans le premier cas, il faut donc résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 5x^2 + 2 = 0$, soit $x^2 = 1$, donc $x = \pm 1$. Dans le deuxième cas, $z = ib$, avec $-3b^2 - 5b^2 + 2 = 0$, soit $b^2 = \frac{1}{4}$, donc $z = \pm\frac{i}{2}$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1, -1, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\}$.

   Encore une fois, on s'en sort très bien de façon purement algébrique, en posant $z = a + ib$: $3(a^2 - b^2 + 2iab) - 5(a^2 + b^2) + 2 = 0$ devient $-2a^2 - 8b^2 + 2 + 6iab = 0$. L'annulation de la partie imaginaire donne immédiatement $ab = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ ou $b = 0$. On retrouve les deux cas étudiés ci-dessus, et bien sûr les deux mêmes équations et les mêmes solutions.

7. Il s'agit de calculer les racines quatrièmes d'un nombre complexe, ce pour quoi on sait qu'on peut procéder de manière algébrique ou trigonométrique. Même si je vous ai plutôt conseillé en cours de faire de façon trigonométrique en général, on obtient ici des valeurs exactes par la calcul algébrique (et rien de bon par la méthode trigonométrique, faute de connaitre un angle remarquable ayant pour cosinus $-\frac{7}{25}$). Commençons par calculer les racines carrées de $24i-7$: soit $Z = a+ib$ vérifiant $Z^2 = 24i-7$, on aura les deux équations $a^2-b^2 = -7$ et $2ab = 24$, plus la condition sur le module $|Z^2| = a^2 + b^2 = |24i - 7| = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25$. On en déduit que $2a^2 = 25 - 7 = 18$ et $2b^2 = 25 + 7 = 32$, donc $a = \pm 3$ et $b = \pm 4$. Comme de plus a et b sont de même signe, on trouve les deux racines $Z_1 = 3+4i$ et $Z_2 = -3-4i$. Restent à calculer les racines carrées de ces deux complexes, par la même méthode. Elle ont chacune pour module 5, dont en posant $z = a + ib$, on obtient dans le premier cas $2a^2 = 5 + 3 = 8$ et $2b^2 = 5 - 3 = 2$, et dans le deuxième cas $2a^2 = 2$ et $2b^2 = 8$. Comme a et b sont de même signe dans le premier cas et de signe contraire dans le deuxième, on obtient quatre racines : $\mathcal{S} = \{2 + i, -2 - i, 1 - 2i, -1 + 2i\}$.

8. En multipliant les deux membres de l'équation par z (remarquons au passage que 0 est une solution qu'il faudra penser à rajouter si elle n'apparait pas dans nos calculs), on obtient $|z|^2 = z^{n+1}$. En particulier, z^{n+1} est un nombre réel positif, ce qui implique $\arg z^{n+1} \equiv 0[2\pi]$, donc $\arg z \equiv 0\left[\frac{2\pi}{n+1}\right]$. De plus, en prenant le module de cette même équation, on a $|z|^2 = |z|^{n+1}$, ce qui ne peut se produire que si $z = 1$, sauf dans le cas où $n = 1$, où l'égalité de

modules est toujours vérifiée. Dans ce dernier cas, l'équation se réduit en fait à $z = \overline{z}$, dont les solutions sont tous les réels. Si $n > 1$, la combinaisons des deux informations obtenues nous montre que les solutions sont les racines $n+1$-èmes de l'unité, auxquelles on ajoute 0. Je souhaite pour conclure bon courage à ceux qui tenteront de se lancer dans un calcul bourrin en posant $z = a + ib$.

9. Cherchons donc la racine réelle en posant $z = x \in \mathbb{R}$. On doit avoir $4ix^3+2x^2+6ix^2-5x-4ix+3-21i = 0$. En particulier, la partie réelle du membre de gauche étant nulle, on a $2x^2-5x+3 = 0$, équation qui a pour solution évidente 1, et pour deuxième solution $\frac{3}{2}$ (en effet, le produit des deux solutions vaut $\frac{3}{2}$). Si $x = 1$, la partie imaginaire du membre de gauche de l'équation vaut -15, donc 1 n'est pas solution. Par contre, si $x = \frac{3}{2}$, elle vaut $4 \times \frac{27}{8} + 6 \times \frac{9}{4} - 4 \times \frac{3}{2} - 21 = 0$, donc il s'agit bien d'une racine de l'équation. On peut donc factoriser cette équation sous la forme $\left(z - \frac{3}{2}\right)(az^2 + bz + c) = az^3 + \left(b - \frac{3}{2}a\right)z^2 + \left(c - \frac{3}{2}b\right)z - \frac{3}{2}c$ (les coefficients a, b et c étant ici des nombres complexes ; on peut tout à fait effectuer une division euclidienne dans ce cas également). Par identification des coefficients, on obtient $a = 4i$, $b - \frac{3}{2}a = 2 + 6i$, soit $b = 2 + 12i$, et $c - \frac{3}{2}b = -5 - 4i$, soit $c = -2 + 14i$ (et on vérifie que la dernière équation $-\frac{3}{2}c = 3 - 21i$ est bien vérifiée car une erreur de calcul est vite faite avec les nombres complexes). On s'est donc ramenés à l'équation $\left(z - \frac{3}{2}\right)\left(4iz^2 + (2 + 12i)z - 2 + 14i\right) = 0$. Reste à trouver les racines de la parenthèse, on peut tout diviser par 2 pour obtenir un discriminant $\Delta = (1 + 6i)^2 - 8i(-1 + 7i) = 1 - 36 + 12i + 8i + 56 = 21 + 20i$. Pour calculer une racine carrée de Δ, on pose $\delta = a + ib$, si $\delta^2 = \Delta$ implique $a^2 - b^2 = 21$, $2ab = 20$, et via la calcul du module $a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29$. On en déduit $2a^2 = 50$ et $2b^2 = 8$, soit $a^2 = 25$ et $b^2 = 4$. Comme a et b sont de même signe, on peut choisir $\delta = 5 + 2i$ ou $\delta = -5 - 2i$. Enfin, les deux dernières solutions de notre équation sont $z_1 = \frac{-1 - 6i - 5 - 2i}{4i} = -2 + \frac{3}{2}i$ et $z_2 = \frac{-1 - 6i + 5 + 2i}{4i} = -1 - i$. En conclusion, $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}, -1 - i, -2 + \frac{3}{2}i\right\}$.

10. Pour cette équation je ne résiste pas à tricher un peu en remarquant que $(z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = z^5 + 1$, donc les solutions de l'équation vérifient $z^5 = -1$, soit $(-z)^5 = 1$, et sont donc les opposés des racines cinquièmes de l'unité, auxquels il faut enlever -1 qui n'était pas solution de l'équation initiale (on l'a rajoutée en multipliant par $z + 1$, qui s'annule lorsque $z = -1$). On a donc pour solutions $-e^{i\frac{2\pi}{5}} = e^{i(\frac{2\pi}{5}+\pi)} = e^{i\frac{7\pi}{5}}$; $-e^{i\frac{4\pi}{5}} = e^{i\frac{9\pi}{5}}$; $-e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{5}}$ et enfin $-e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

   Une méthode moins astucieuse est disponible mais tout de même assez brutale, et vous aurez du mal à y penser tous seuls. Commençons par constater que 0 n'est pas solution de l'équation, et divisons-là par z^2, ce qui donne $z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$. On peut alors avoir l'idée de faire le changement de variable $Z = z + \frac{1}{z}$. On aurait alors $Z^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$. On remarque alors que notre équation s'écrit $Z^2 - 1 - Z = 0$, équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$, et qui admet donc deux racines $Z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Il reste à retrouver les valeurs de z correspondantes, ce qui nécessite encore du calcul. Par exemple, si $Z = Z_1$, on doit résoudre l'équation $z+\frac{1}{z} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, soit en multipliant par z, $z^2 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$. Cette nouvelle équation du second degré a pour discriminant $\Delta = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} - 4 = \dfrac{\sqrt{5}-5}{2} < 0$. il y a donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$, et $z_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$. De même, l'équation $z + \dfrac{1}{z} = Z_2$ a pour discriminant $\Delta = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - 4 = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} < 0$, ce qui amène aux deux autres solutions $z_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$ et $z_4 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$. En comparant avec les solutions obtenues par la méthode astucieuse plus haut, on peut en déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus des multiples impairs de $\dfrac{\pi}{5}$. Il n'est pas très compliqué de se convaincre que $z_1 = e^{i\frac{\pi}{5}}$, $z_2 = e^{i\frac{9\pi}{5}}$, $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{5}}$ et $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{5}}$.

11. On peut bien sûr supposer $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sans perte de généralité (tout ce qui compte étant la valeur de la tangente de cet angle). Simplifions le membre de droite en multipliant tout par $\cos(\alpha)$: $\dfrac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)} = \dfrac{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)} = \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$. On souhaite donc que le nombre $\dfrac{1+iz}{1-iz}$ soit une racine cubique de $e^{2i\alpha}$, c'est-à-dire que $\dfrac{1+iz}{1-iz} = e^{i(\frac{2\alpha+2k\pi}{3})}$, avec $k \in \{0,1,2\}$. En notant $\theta = \dfrac{2\alpha+2k\pi}{3}$, on a donc $1+iz = e^{i\theta}(1-iz)$, soit $iz(1+e^{i\theta}) = e^{i\theta}-1$. Comme $1+e^{i\theta} \neq 0$ (sinon on aurait $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$), on peut écrire simplement $z = \dfrac{e^{i\theta}-1}{i(1+e^{i\theta})} = \dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{ie^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})} = \dfrac{2i\sin(\frac{\theta}{2})}{2i\cos(\frac{\theta}{2})} = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. Autrement dit, les solutions de l'équation sont les trois nombres complexes $z_k = \tan\left(\dfrac{\alpha+k\pi}{3}\right)$, avec $k \in \{0,1,2\}$.

Exercice 4 (**)

1. Impossible de résoudre ce système par des méthodes traditionnelles, mais la forme très particulière des membres de gauche des deux équations fait penser à un développement de cube. Plus précisément $(x+iy)^3 = x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3$, donc en posant $z = x+iy$, le système est tout simplement équivalent à l'unique équation $z^3 = 1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Il ne reste plus qu'à effectuer un calcul de racines cubiques complexes, essayons de mettre notre membre de droite sous forme exponentielle : $\left|1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \sqrt{1+\dfrac{1}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, donc $1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$. On en déduit que $z = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{3}}e^{i(\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3})}$, avec $k \in \{0,1,2\}$ (j'ai appliqué directement la formule théorique des racines cubiques, mais on peut bien sûr refaire la preuve en passant : racine cubique du module et argument divisé par 3). Les solutions du système initial sont absolument passionnante : $x = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{3}}\cos\left(\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ et $y = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{3}}\sin\left(\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)$, avec $k \in \{0,1,2\}$ (la valeur de k doit être la même pour x et y, il n'y a que trois couples de solutions).

2. Ici, bien entendu, le nombre j est égal à $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Il suffit en fait de faire des combinaisons astucieuses des trois lignes en exploitant le fait que $1+j+j^2 = 0$ (c'est la somme des trois racines cubiques de l'unité). Ainsi, $L_1+L_2+L_3$ donne immédiatement $3x = a+b+c$, soit $x = \dfrac{a+b+c}{3}$. De même, $L_1+jL_2+j^2L_3$ donne $3z = a+jb+j^2c$ (ne pas oublier que $j^3 = 1$

puisqu'il s'agit d'une racine cubique de l'unité, et donc que $j^4 = j$), soit $z = \dfrac{a + jb + j^2c}{3}$. Enfin, la combinaison $L_1 + j^2L_2 + jL_3$ permet de trouver $y = \dfrac{a + j^2b + jc}{3}$. Il ne reste plus qu'à vérifier que ces valeurs sont effectivement solutions du système pour conclure (calcul immédiat).

3. Notons $S = x + y$ et $P = xy$, on peut écrire la première équation du système sous la forme $xy(x + y) = 6$, soit $SP = 6$, et la deuxième sous la forme $(x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 9$, soit $S^3 - 3SP = 9$. On en déduit que $S^3 = 9 + 18 = 27$, donc $S \in \{3, 3j, 3j^2\}$ (racines cubiques immédiates à calculer ici). Les valeurs de P correspondantes seront $\dfrac{6}{2} = 2$, $\dfrac{6}{3j} = 2j^2$ et $\dfrac{6}{3j^2} = 2j$ en exploitant le fait que $j^3 = 1$. Ensuite, on sait que les nombres x et y sont solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$ (sinon on le retrouve avec une petite substitution), ce qui nous laisse trois équations à résoudre. Première possibilité : $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ et pour racines $x_1 = \dfrac{3 + 1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3 - 1}{2} = 1$ (l'une des deux racines sera égale à x et l'autre à y indifféremment puisque les deux variables jouent un rôle symétrique dans le système initial). Deuxième possibilité : $x^2 - 3jx + 2j^2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9j^2 - 8j^2 = j^2$, dont une racine carrée évidente est j. Les racines de l'équation sont donc $x_1 = \dfrac{3j + j}{2} = 2j$ et $\dfrac{3j - j}{2} = j$. Enfin, on peut avoir $x^2 - 3j^2x + 2j = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9j^4 - 8j = j^4$ (puisque $j = j^4$), qui admet pour racine carrée évidente j^2. On trouve alors comme précédemment $x_1 = 2j$ et $x_2 = j$. On a finalement six couples solutions du système initial : $\mathcal{S} = \{(1, 2), (2, 1), (j, 2j), (2j, j), (j^2, 2j^2), (2j^2, j^2)\}$.

Exercice 5 (**)

1. On peut en effet tout développer peu subtilement : $z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 = z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10^2 + 5z - 1$. Miracle, ça se simplifie avantageusement pour donner (une fois tout divisé par 2) $5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$. On pose $Z = z^2$, et on a $5Z^2 + 10Z + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 100 - 20 = 80$, donc les solutions en sont $Z_1 = \dfrac{-10 + \sqrt{80}}{10} = -1 + \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ et $Z_2 = -1 - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Il ne reste qu'à prendre les racines carrées de ces deux nombres, qui sont des réels négatifs, pour obtenir les solutions de l'équation initiale : $\mathcal{S} = \left\{ i\sqrt{1 - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}}; -i\sqrt{1 - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}}; i\sqrt{1 + \dfrac{2\sqrt{5}}{5}}; -i\sqrt{1 + \dfrac{2\sqrt{5}}{5}} \right\}$.
2. La méthode la plus simple est certainement de constater que 1 n'est pas racine, on peut donc faire le quotient et obtenir $\left(\dfrac{z + 1}{z - 1}\right)^5 = 1$, donc $\dfrac{z + 1}{z - 1}$ est une racine cinquième de l'unité. On détermine ensuite facilement les valeurs de z correspondantes : si $\dfrac{z + 1}{z - 1} = a$, on a $z + 1 = az - a$, donc $z(a - 1) = a + 1$, soit $z = \dfrac{a + 1}{a - 1}$. On remarque que 1 ne donne pas de solution, il n'y a donc que quatre valeurs possibles pour z (c'est normal, l'équation initiale est en fait de degré 4) : $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{e^{i\frac{2\pi}{5}} + 1}{e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1}; \dfrac{e^{i\frac{4\pi}{5}} + 1}{e^{i\frac{4\pi}{5}} - 1}; \dfrac{e^{i\frac{6\pi}{5}} + 1}{e^{i\frac{6\pi}{5}} - 1}; \dfrac{e^{i\frac{8\pi}{5}} + 1}{e^{i\frac{8\pi}{5}} - 1} \right\}$.
3. Les solutions obtenues par les deux méthodes sont évidemment identiques, pourtant on ne les a pas sous la même forme, et il n'est même pas immédiat de savoir quelle racine du premier ensemble correspond à quelle racine du deuxième. Pour cela, simplifions les expressions obtenues par la deuxième méthode en factorisant par l'angle moitié : $\dfrac{e^{i\frac{2\pi}{5}} + 1}{e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{5}}(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{-i\frac{\pi}{5}})}{e^{i\frac{\pi}{5}}(e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{-i\frac{\pi}{5}})} = \dfrac{2\cos(\frac{\pi}{5})}{2i\sin(\frac{\pi}{5})} = -\dfrac{i}{\tan(\frac{\pi}{5})}$. On obtient de même pour les trois autres solutions

$-\dfrac{i}{\tan(\frac{2\pi}{5})}$, $-\dfrac{i}{\tan(\frac{3\pi}{5})}$ et $-\dfrac{i}{\tan(\frac{4\pi}{5})}$. Sachant que la tangente est croissante sur chacun de ses intervalles de définition, et que les valeurs de $\tan\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ sont négatives, on peut effectuer l'identification suivante : $\dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{5})} = \sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\dfrac{1}{\tan(\frac{2\pi}{5})} = \sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\dfrac{1}{\tan(\frac{3\pi}{5})} = -\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$, et enfin $\dfrac{1}{\tan(\frac{4\pi}{5})} = -\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$. En particulier, on aura $\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{5}{5-2\sqrt{5}}$, donc $\dfrac{1}{\cos^2(\frac{2\pi}{5})} = 1+\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{10-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}$, et $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{(5-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{100-20}} = \sqrt{\dfrac{30-10\sqrt{5}}{80}} = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}}$. De façon tout à fait similaire, $\tan^2\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{5}{5+2\sqrt{5}}$, donc $\dfrac{1}{\cos^2(\frac{4\pi}{5})} = \dfrac{10+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}$, et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = -\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}} = -\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 6 (**)

C'est plus un exercice d'arithmétique (ou un exercice sur les sous-groupes !) qu'un exercice sur les nombres complexes. Commençons par remarquer que, si z est une racine n-ème de l'unité, alors z est aussi une racine k-ème de l'unité pour tous les entiers k multiples de n. En effet, si $k = a \times n$, où a est un nombre entier, et $z^n = 1$, alors $z^k = (z^n)^a = 1^a = 1$. Pour revenir à notre problème, si on note r le pgcd de p et de q, toutes les racines r-èmes de l'unité sont donc à la fois racines p-èmes et q-èmes, donc $\mathbb{U}_r \subset \mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q$.

La réciproque utilise le théorème de Bezout. Si on a simultanément $z \in \mathbb{U}_p$ et $z \in \mathbb{U}_q$, on a $z^p = z^q = 1$ donc pour tous entiers n et m, on a $z^{np-mq} = \dfrac{z^{np}}{z^{mq}} = 1$. Or, il existe un couple d'entiers tels que $np - mq$ soit égal à r, donc $z^r = 1$. Pour montrer Bezout, on peut passer par l'algorithme d'Euclide : à chaque étape, le nouveau reste obtenu est une combinaison à coefficients entiers des deux restes précédents (il n'y a qu'à écrire la division euclidienne), donc par récurrence facile de p et de q. Comme le dernier reste est égal à r, celui-ci est bien une combinaison à coefficients entiers de p et q.

Conclusion : $\mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q = \mathbb{U}_{pgcd(p,q)}$.

Exercice 7 (*)

Pour la première, qui est un grand classique, Euler est votre ami :

$$\begin{aligned}
\cos^6(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6 \\
&= \frac{e^{6ix} + 6e^{5ix}e^{-ix} + 15e^{4ix}e^{-2ix} + 20e^{3ix}e^{-3ix}15e^{2ix}e^{-4ix} + 6e^{ix}e^{-5ix} + e^{-6ix}}{64} \\
&= \frac{2\cos(6x) + 12\cos(4x) + 30\cos(2x) + 20}{64} \\
&= \frac{1}{32}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(4x) + \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

Pour la deuxième, $\sin^2(x)\cos^3(x) = (1-\cos^2(x))\cos^3(x) = \cos^3(x) - \cos^5(x)$. Or, par la même méthode que ci-dessus, $\cos^5(x) = \dfrac{1}{16}(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x))$ et $\cos^3(x) = \dfrac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x))$, donc $\sin^2(x)\cos^3(x) = -\dfrac{1}{16}\cos(5x) - \dfrac{1}{16}\cos(3x) + \dfrac{1}{8}\cos(x)$.

Enfin pour la dernière linéarisation,

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sin^5(x) &= \cos(x)\sin(x)\sin^4(x)\\
&= \frac{1}{2}\sin(2x)\sin^4(x)\\
&= \frac{1}{32}\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)(e^{ix}-e^{-ix})^4\\
&= \frac{1}{32}\frac{(e^{2ix}-e^{-2ix})(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})}{2i}\\
&= \frac{1}{32}\frac{e^{6ix}-4e^{4ix}+6e^{2ix}-4+e^{-2ix}-e^{2ix}+4-6e^{-2ix}+4e^{-4ix}-e^{-6ix}}{2i}\\
&= \frac{1}{32}\frac{e^{6ix}-4e^{4ix}+5e^{2ix}-5e^{-2ix}+4e^{-4ix}-e^{-6ix}}{2i}\\
&= \frac{1}{32}(\sin(6x)-4\sin(4x)+5\sin(2x))
\end{aligned}$$

On commence par écrire $\cos(5x) = \mathrm{Re}\,(e^{i5x}) = \mathrm{Re}\,(e^{ix})^5 = \mathrm{Re}\,(\cos(x)+i\sin(x))^5 = \mathrm{Re}\,(\cos^5(x)+ 5\cos^4(x)(i\sin(x))+10\cos^3(x)(i\sin(x))^2+10\cos^2(x)(i\sin(x))^3+5\cos(x)(i\sin(x))^4+(i\sin(x))^5)$. On ne garde que les termes réels de la somme pour obtenir

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \cos^5(x)-10\cos^3(x)\sin^2(x)+5\cos(x)\sin^4(x)\\
&= \cos^5(x)-10\cos^3(x)(1-\cos^2(x))+5\cos(x)(1-\cos^2(x))^2\\
&= \cos^5(x)-10\cos^3(x)+10\cos^5(x)+5\cos(x)-10\cos^3(x)+5\cos^5(x)\\
&= 16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x)
\end{aligned}$$

De l'autre côté, $\sin^2(3x) = 1-\cos^2(3x) = 1-(4\cos^3(x)-3\cos(x))^2 = 1-16\cos^6(x)+24\cos^4(x)-9\cos^2(x)$. Un peu de courage pour la dernière étape :

$$\begin{aligned}
\cos(5x)\sin^2(3x) &= (16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x))(-16\cos^6(x)+24\cos^4(x)-9\cos^2(x)+1)\\
&= -256\cos^{11}(x)+384\cos^9(x)-144\cos^7(x)+16\cos^5(x)+320\cos^9(x)-480\cos^7(x)\\
&\quad +180\cos^5(x)-20\cos^3(x)-80\cos^7(x)+120\cos^5(x)-45\cos^3(x)+5\cos(x)\\
&= -256\cos^{11}(x)+704\cos^9(x)-704\cos^7(x)+316\cos^5(x)-65\cos^3(x)+5\cos(x)
\end{aligned}.$$

Je me rends compte en relisant le corrigé que ce calcul peut faire un peu peur !

Attaquons-nous désormais au tout dernier calcul. On peut évidemment tricher en utilisant les formules de duplication, mais ça marche très bien comme ci-dessus :
$\sin(2x) = \mathrm{Im}\,(e^{ix})^2 = \mathrm{Im}\,(\cos(x)+i\sin(x))^2 = \mathrm{Im}\,(\cos^2(x)+2i\cos(x)\sin(x)-\sin^2(x)) = 2\cos(x)\sin(x)$

On fait de même pour $\sin(4x) = \mathrm{Im}\,(\cos(x)+i\sin(x))^4 = 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x) = 4\sin(x)(\cos^3(x)-\cos(x)(1-\cos^2(x))) = 4\sin(x)(2\cos^3(x)-\cos(x)) = \sin(x)(8\cos^3(x)-4\cos(x))$.

On enchaine courageusement : $\sin(6x) = \mathrm{Im}\,(\cos(x)+i\sin(x))^6 = 6\cos^5(x)\sin(x)-20\cos^3(x)\sin^3(x)+ 6\cos(x)\sin^5(x) = \sin(x)(6\cos^5(x)-20\cos^3(x)(1-\cos^2(x))+6\cos(x)(1-\cos^2(x))^2) = \sin(x)(6\cos^5(x)- 20\cos^3(x)+20\cos^5(x)+6\cos(x)-12\cos^3(x)+6\cos^5(x)) = \sin(x)(32\cos^5(x)-32\cos^3(x)+6\cos(x))$.

Enfin, $\sin(8x) = \mathrm{Im}\,(\cos(x)+i\sin(x))^8 = 8\cos^7(x)\sin(x)-56\cos^5(x)\sin^3(x)+56\cos^3(x)\sin^5(x)- 8\cos(x)\sin^7(x) = \sin(x)(8\cos^7(x)-56\cos^5(x)(1-\cos^2(x))+56\cos^3(x)(1-\cos^2(x))^2-8\cos(x)(1- \cos^2(x))^3) = \sin(x)(8\cos^7(x)-56\cos^5(x)+56\cos^7(x)+56\cos^3(x)-112\cos^5(x)+56\cos^7(x)-8\cos(x)+ 24\cos^3(x)-24\cos^5(x)+8\cos^7(x)) = \sin(x)(128\cos^7(x)-192\cos^5(x)+80\cos^3(x)-8\cos(x))$.

Il ne reste plus qu'à brillamment additionner tout ça pour obtenir
$\sin(2x)+\sin(4x)+\sin(6x)+\sin(8x) = \sin(x)(128\cos^7(x)-160\cos^5(x)+56\cos^3(x)-4\cos(x))$.

Exercice 8 (**)

1. Pour gagner un peu de temps, on peut calculer les deux à la fois : $S_n+iT_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(kx)+ i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{ix})^k$. On reconnait un binôme de Newton (quitte à ajouter un 1^{n-k}

dans la somme), donc $S_n + iT_n = (1+e^{ix})^n = e^{i\frac{nx}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})^n = 2^n e^{i\frac{nx}{2}} \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)$ avec une petite factorisation par l'angle moitié. Il ne reste plus qu'à séparer partie réelle et partie imaginaire : $S_n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$ et $T_n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$.

2. On aura besoin de supposer $x \not\equiv 0[\pi]$ pour que tous les calculs aient du sens (dans le cas contraire tous les termes de la somme sont égaux à 1, et donc $U_n = n+1$). On peut écrire $U_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(e^{ix})^k}{\cos^k(x)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1 - \frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}(x)}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos(x)}}\right) = \frac{1}{\cos^n(x)}\mathrm{Re}\left(\frac{\cos^{n+1}(x) - e^{i(n+1)x}}{\cos(x) - e^{ix}}\right) = \frac{1}{\cos^n(x)}\mathrm{Re}\left(\frac{\cos^{n+1}(x) - e^{i(n+1)x}}{-i\sin(x)}\right) = \frac{1}{\cos^n(x)\sin(x)}\mathrm{Re}\left(i(\cos^{n+1}(x) - e^{i(n+1)x})\right) = \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n(x)\sin(x)}$.

Exercice 9 (**)

1. Calculons donc $f(i) = \left|1 - i - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} - i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Pour $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, on peut déjà signaler que $z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $f(e^{i\frac{\pi}{3}}) = \left|1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \left|\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.
2. Un module étant toujours positif, l'inégalité $f(z) \geqslant 0$ est immédiate. Pour l'autre, on peut simplement appliquzr l'inégalité triangulaire : $f(z) \leqslant |1| + |z| + \frac{|z|^2}{2} = \frac{5}{2}$.
3. Si z est de module 1, on a $a^2 + b^2 = 1$. On peut alors écrire $z = a^2 - b^2 + 2iab$, soit $\mathrm{Re}\,(z^2) = a^2 - b^2 = a^2 - (1-a^2) = 2a^2 - 1$.
4. En posant bêtement $z = a+b$, on a $f(z)^2 = \left|1 - a - ib + \frac{1}{2}((2a^2-1)) + iab\right|^2 = \left(\frac{1}{2} - a + a^2\right)^2 + b^2(a-1)^2 = \frac{1}{4} + a^2 + a^4 - a + a^2 - 2a^3 + (1-a^2)(a^2 - 2a + 1) = a^4 - 2a^3 + 2a^2 - a + \frac{1}{4} + a^2 - 2a + 1 - a^4 + 2a^3 - a^2 = 2a^2 - 3a + \frac{5}{4}$. On va donc poser $P(a) = 2a^2 - 3a + \frac{5}{4}$.
5. Le polynôme P admet pour dérivée $P'(a) = 4a - 3$, qui s'annule pour $a = \frac{3}{4}$. Notre polynôme est donc décroissant sur $\left[-1, \frac{3}{4}\right]$ et croissant sur $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. En particulier, il admet pour minimum $P\left(\frac{3}{4}\right) = 2 \times \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1}{8}$. De plus, $P(-1) = 2 + 3 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$, et $P(1) = 2 - 3 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$, donc le maximum atteint par P sur l'intervalle $[-1,1]$ est $\frac{25}{4}$.
6. Par définition, $f(z) = \sqrt{P(a)}$, pour une valeur de a comprise entre -1 et 1, puisqu'un nombre complexe de module 1 a une partie réelle qui est forcément comprise entre -1 et 1. On en déduit, en exploitant les résultats de la question précédente, que $\frac{1}{8} \leqslant f(z)^2 \leqslant \frac{25}{4}$, donc que $\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant f(z) \leqslant \frac{5}{2}$. La borne supérieure est atteinte lorsque $z = -1$, la borne inférieure lorsque $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{3}{4}$, donc $\mathrm{Im}\,(z)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$. Il y a deux valeurs qui collent : $z = \frac{3}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Exercice 10 (* à **)

1. En effet, $|u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(\overline{u} + \overline{v}) + (u-v)(\overline{u} - \overline{v}) = |u|^2 + u\overline{v} + v\overline{u} + |v|^2 + |u|^2 - u\overline{v} - v\overline{u} + |v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

2. Puisque u et v sont de module 1, on peut poser $u = e^{i\theta}$ et $v = e^{i\theta'}$. On a alors $\dfrac{u+v}{1+uv} = \dfrac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i(\theta+\theta')}} = \dfrac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \times 2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}} = \dfrac{e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}{\cos\frac{\theta+\theta'}{2}}$, qui est bien un nombre réel.

3. Si $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$. Cherchons les valeurs de $\theta \in [-\pi, \pi]$ pour lesquelles $|1+z| \geqslant 1$. Par un calcul classique, $|1+z| = |e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})| = 2\left|\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|$. Or, $\left|\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right| \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\theta}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right][\pi] \Leftrightarrow \theta \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right][2\pi]$. Vérifions que pour les valeurs restantes de θ, $|1+z^2| \geqslant 1$. En effet, on a alors $\theta \in \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right][2\pi]$, donc $2\theta \in \left[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}\right][4\pi]$, c'est-àdire que $2\theta \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right][4\pi]$ donc $|1+z^2| \geqslant 1$ d'après le calcul précédent, puisque $z^2 = e^{2i\theta}$. Les seuls cas pour lesquels les deux inégalités sont vérifiées sont $z_1 = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 11 (**)

1. On peut écrire $z_1 = \dfrac{z_1+z_2}{2} + \dfrac{z_1-z_2}{2}$, puis appliquer l'inégalité triangulaire : $|z_1| \leqslant \dfrac{1}{2}|z_1 + z_2| + \dfrac{1}{2}|z_1 - z_2|$. De même, on aura $|z_2| \leqslant \dfrac{1}{2}|z_1+z_2| + \dfrac{1}{2}|z_1 - z_2|$ (soit on dit que les deux variables jouent un rôle symétrique, soit on écrit que $z_2 = \dfrac{z_1+z_2}{2} + \dfrac{z_2-z_1}{2}$). Il ne reste plus qu'à additionner les deux majoration pour trouver $|z_1| + |z_2| \leqslant |z_1+z_2| + |z_1 - z_2|$.
2. Si on trace dans le plan complexe le parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont pour affixes recpectives z_1 et z_2, alors $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$ représentent les affixes des deux diagonales du parallélogramme. On a donc prouvé que, dans un parallélogramme, la somme des longueurs des deux diagonales est toujours supérieure à celle de deux côtés consécutifs (demi-périmètre du parallélogramme).
3. Pour avoir égalité, il faut qu'il y ait égalité dans les deux inégalités triangulaires exploitées. Autrement dit, on doit avoir (en excluant les cas de nullité d'un des deux vecteurs et en multipliant tout par 2) $z_1 - z_2 = k(z_1 + z_2)$ et $z_2 - z_1 = k'(z_1 + z_2)$, avec k et k' qui doivent être tous les deux des réels positifs. Dans la mesure où $z_1 - z_2$ et $z_2 - z_1$ sont des nombres opposés, ça ne peut se produire que si $z_1 - z_2 = 0$, donc $z_2 = z_1$. Il faut ajouter le cas où $z_2 = -z_1$, qui est le cas « trivial » d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Dans les deux cas, le parallélogramme n'en est pas vraiment un puisqu'il est aplati.

Exercice 12 (**)

1. Les trois nombres étant de module 1, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{a+b+c} = 0$. Or, en mettant au même dénominateur, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{bc+ac+ab}{abc}$, ce qui prouve que $bc + ab + a = 0$. Mais $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ est aussi nul puisque $a+b+c = 0$. On en déduit que $a^2+b^2+c^2+-2(ab+ac+bc) = 0$, donc que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.
2. En effet, $e^{ix} + e^{iy} = -e^{iz}$ est bien de module 1. Or, $|e^{ix} + e^{iy}| = |e^{i(\frac{x+y}{2})}(e^{i(\frac{x-y}{2})} + e^{i(\frac{y-x}{2})})| = 2\left|\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right|$. On en déduit que $\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \pm\dfrac{1}{2}$, puis que $\dfrac{x-y}{2} \equiv \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, ou $\dfrac{x-y}{2} \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$. On a en effet $y \equiv x + \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $y \equiv x - \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$. Le même raisonnement donne bien sûr les mêmes possibilités pour z. On ne peut avoir les mêmes signes pour y et z sinon la somme $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz}$ ne serait pas nulle, ce qui donne bien (à parmutation près) l'unique

possibilité de l'énoncé. Mais alors $2y \equiv 2x - \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $2z \equiv 2x + \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$, ce qui implique bien que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$ (les trois points correspondants du cercle trigonométrique forment un triangle équilatéral centré en 0).

Exercice 13 (**)

L'inégalité triangulaire donne immédiatement la majoration $|z^3 + 2iz| \leqslant |z|^3 + 2|z| \leqslant 3$ avec l'hypothèse $|z| \leqslant 1$. Peut-on transformer cette inégalité en égalité. Il faudrait pour cela avoir $z^3 = 2ikz$, avec $k \in \mathbb{R}^+$, et $|z| = 1$. Pour cela on doit avoir, en passant aux modules, $|z|^3 = 1 = |2ikz| = 2k$, donc $k = \dfrac{1}{2}$. On en déduit donc $z^3 = iz$, d'où $z^2 = i$ (z ne peut certainement pas être nul s'il est de module 1). Les racines carrées du nombre i se calculent facilement : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ convient. Il ne reste plus qu'à vérifier si l'égalité est alors bien vraie. On a dans ce cas $z^3 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$, et $2iz = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}i$, donc $z^3 + 2iz = \dfrac{3}{\sqrt{2}}(-1+i)$, qui a bien pour module 3. Finalement, on a donc $\sup_{|z|\leqslant 1} |z^3 + 2iz| = 3$.

Exercice 14 (* à **)

- C'est le cas le plus classique de définition d'un cercle qui donne pour équation complexe $|z - 2 + i| = 3$. En élevant au carré et en développant, on obtient $(z-2+i)(\overline{z}-2-i) = 9$, soit $z\overline{z} - (2+i)z + (i-2)\overline{z} + 5 = 9$, donc une équation développée de la forme $z\overline{z} - (2+i)z + (i-2)\overline{z} - 4 = 0$. Passons à l'équation cartésienne : en posant $z = x + iy$ dans la dernière équation, $x^2 + y^2 - (2+i)(x+iy) + (i-2)(x-iy) - 4 = 0$, donc $x^2 + y^2 - 2x - 2iy - ix + y + ix + y - 2x + 2iy - 4 = 0$. Tous les termes imaginaires s'annulent (ce sera toujours le cas) pour donner $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Si on factorise cette équation développée en faisant apparaitre des formes canoniques, cela donne $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 4 = 0$, soit $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$. On retrouve bien l'équation d'un cercle de centre $A(2; -1)$ et de rayon $\sqrt{9} = 3$.
- Pour changer un peu, utilisons la caractérisation d'un cercle donné par un de ses diamètres : un point M appartient au cercle si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$. En termes de nombres complexes, on a donc l'équation $(\overline{z_M - z_A})(z_M - z_B) \in i\mathbb{R}$, soit, en posant $z = x + iy$, $(x - iy + 1 + 2i)(x + iy - 3 - 4i) \in i\mathbb{R}$. En isolant la partie réelle qui doit être nulle, on tombe sur $x^2 - 3x + y^2 - 4y + x - 3 - 2y + 8 = 0$, soit $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$. On reconnait l'équation cartésienne développées d'un cercle. Factorisons-là : $(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0$, soit $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$. On reconnait un cercle de centre $A(1+3i)$ (qui est bien le milieu du segment $[AB]$) et de rayon $\sqrt{5}$. L'équation complexe sera donc $|z - 1 - 3i| = \sqrt{5}$, soit en développant $(z-1-3i)(\overline{z} - 1 + 3i) = 5$, ou encore $z\overline{z} + (3i-1)z - (1+3i)\overline{z} + 5 = 0$.
- On peut factoriser cette équation sous la forme $(z-i)(\overline{z}+i) - 1 - 3 = 0$, soit $|z-i|^2 = 4$ et donc $|z-i| = 2$. On reconnait un cercle de centre $A(i)$ et de rayon 2. Alternativement, on écrit $z = x + iy$ et on remplace dans l'équation initiale : $(x+iy)(x-iy) + i(x+iy) - i(x-iy) - 3 = 0$ donne $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$. On peut factoriser cette équation cartésienne à l'aide des formes canoniques : $x^2 + (y-1)^2 - 1 - 3 = 0$, soit $x^2 + (y-1)^2 = 4$. On retrouve évidemment le même centre et le même rayon pour le cercle.
- Factorisons cette équation : $(x-1)^2 - 1 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} + 9 = 0$, soit $(x-1)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = -\dfrac{23}{4}$. Ce cercle ayant le mauvais goût d'être inexistant, on peut donner n'importe quelle équation complexe, mais par souci de cohérence, on va prendre $\left|z - 1 - \dfrac{3}{2}i\right| = -\dfrac{23}{4}$. Par contre, on ne peut pas donner aisément d'équation complexe développée, puisque si on élève au carré comme on a l'habitude, on va tomber sur l'équation du cercle de centre $A\left(1 + \dfrac{3}{2}i\right)$ et de

rayon $\frac{23}{4}$, qui lui n'est pas vide du tout.

- On cherche en fait une équation du cercle circonscrit au triangle ABC. Au vu des coordonnées des points A et B, le centre se trouvera sur l'axi imaginaire pur, qui est la médiatrice de $[AB]$. On recherche donc un point $O(ki)$ vérifiant $|z_O - z_B| = |z_O - z_C|$, soit en élevant au carré $|ki + 1 + i|^2 = |ki - 5i|^2$. À gauche, celà vaut $1 + (k+1)^2 = k^2 + 2k + 2$, à droite on a $(k-5)^2 = k^2 - 10k + 25$. La valeur k doit donc vérifier $k^2 + 2k + 2 = k^2 - 10k + 25$, soit $12k = 23$, donc $k = \frac{23}{12}$. Quant au rayon, il est donc égal à $5 - k$ (la valeur de la distance CO, si vous vous amusez à essayer de recalculer par exemple $k^2 + 2k + 2$, vous allez vous embêter inutilement), soit à $\frac{37}{12}$. On obtient donc la magnifique équation de cercle $\left|z - \frac{23}{12}i\right| = \frac{37}{12}$. Sous forme développée, $\left(z - \frac{23}{12}i\right)\left(\overline{z} + \frac{23}{12}i\right) = \frac{1\ 369}{144}$, soit $z\overline{z} + \frac{23}{12}iz - \frac{23}{12}i\overline{z} - \frac{840}{144} = 0$. Ici, on passe rapidement à l'équation cartésienne en notant que $z - \overline{z} = 2\text{Im }(z)$, ce qui donne $x^2+y^2-\frac{23}{6}y-\frac{105}{18} = 0$. Refactoriser à l'aide de la forme canonique ramène à $x^2+\left(y - \frac{23}{12}\right)^2 = \frac{1\ 369}{144}$.
- Un cercle tangent simultanément aux deux axes a un centre d'affixe $k+ki$ et un rayon $|k|$, où $k \in \mathbb{R}$ (faites un dessin). Ici, on cherche donc une valeur de k pour laquelle $|6+7i-k-ki| = k$, soit $(6-k)^2 + (7-k)^2 = k^2$, donc $36 - 12k + k^2 + 49 - 14k + k^2 = k^2$, donc $k^2 - 26k + 85 = 0$. Cette magnifique équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 676 - 340 = 336$, et admet donc deux racines $k_1 = \frac{26 + \sqrt{336}}{2} = 13 + 2\sqrt{21}$, et $k_2 = 13 - 2\sqrt{21}$. Donnons par exemple les équations du premier cercle (ce sera largement suffisant vu l'intérêt des calculs) : $|z-(13+2\sqrt{21})(1+i)| = 13+2\sqrt{21}$. En développant, $(z-(13+2\sqrt{21})(1+i))(\overline{z}-(13+2\sqrt{21})(1-i)) = 253 + 52\sqrt{21}$, soit $z\overline{z} + (13+2\sqrt{21})(i-1)z - (13+2\sqrt{21})(1+i)\overline{z} + 253 + 52\sqrt{21} = 0$. Si on préfère une équation cartésienne, $(x - 13 - 2\sqrt{21})^2 + (y - 13 - 2\sqrt{21})^2 = 253 + 52\sqrt{21}$, que nous ne développerons pas.

Exercice 15 (**)

Les quatre points sont cocycliques s'il existe un point $O(x+iy)$ pour lequel $OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2$, ce qui va se traduire par les équations $(x-9)^2 + (y-3)^2 = (x-6)^2 + (y-10)^2 = (x+4)^2 + (y-14)^2 = (x+11)^2 + (y-11)^2$ soit, en développant tout comme des grosses brutes, $x^2+y^2-18x-6y+90 = x^2+y^2-12x-20y+136 = x^2+y^2+8x-28y+212 = x^2+y^2+22x-22y+242$. En soustrayant chacune des équations à la première (et en simplifiant tout par 2, et même par 8 pour la dernière équation), on obtient le système équivalent suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcl} -3x & + & 7y & = & 23 \\ -13x & + & 11y & = & 61 \\ -5x & + & 2y & = & 19 \end{array}\right.$. L'opération $5L_1 - 3L_3$ donne alors $29y = 58$, soit $y = 2$. On en déduit $-3x = 23 - 14 = 9$, donc $x = -3$, et on vérifie sans peine que ces valeurs sont solution du système complet. Les quatre points sont donc bien cocycliques, ils appartiennent tous au cercle de centre $O(-3+2i)$ et de rayon $OA = \sqrt{12^2 + 1^2} = \sqrt{145}$.

Exercice 16 (* à ***)

1. Du facile pour commencer : $\frac{z_B + z_C}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$.
2. Toujours facile : $z_{\overrightarrow{AB-2AC}} = z_B - z_A - 2(z_C - z_A) = 4 - 3i - 2(4+2i) = -4 - 7i$
3. Une façon de décrire les points M appartenant à la droite (AC) est de dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ doivent être colinéaires, autrement dit que $(\overline{z_M - z_A})(z_C - z_A) \in \mathbb{R}$. En écrivant

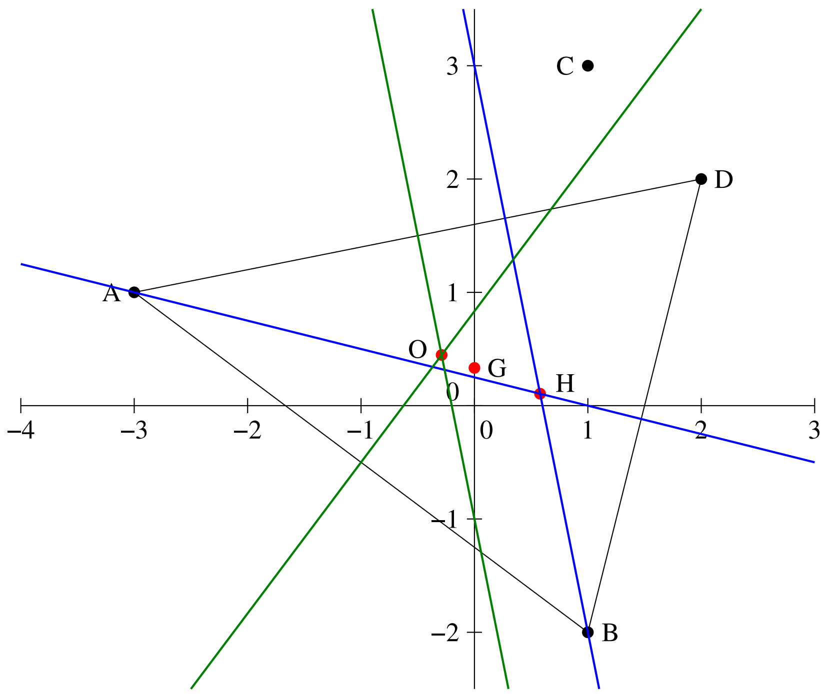
z sous la forme $a+ib$, on a donc $(a-ib+3+i)(4+2i) \in \mathbb{R}$, soit $-4b+4+2a+6=0$, ou encore $a-2b=-5$. De même, M appartient à (BD) si $(\overline{z_M-z_B})(z_D-z_C) \in \mathbb{R}$, soit $(a-ib-1-2i)(1-i) \in \mathbb{R}$, soit encore $-a+1-b-2=0$, donc $-a-b=1$. Il ne reste plus qu'un petit système à résoudre. En additionnant les deux équations, $-3b=-4$ soit $b=\frac{4}{3}$, et $a=2b-5=-\frac{7}{3}$. Le point d'intersection des deux droites a donc pour affixe $-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}i$.

4. Un vecteur directeur de la droite est $\overrightarrow{CD}(1-i)$. Comme il a pour norme $\sqrt{2}$, le vecteur $\overrightarrow{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ est un vecteur directeur normé de (CD). Pour (AB), on a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(4-3i)$, donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(3+4i)$. Ce vecteur ayant pour norme $\sqrt{9+16}=5$, le vecteur $\overrightarrow{v}\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)$ est un vecteur normal normé à (AB).

5. Le cercle de diamètre $[AD]$ peut être décrit par la condition : $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MD}$ sont orthogonaux, soit $(z-z_A)(\overline{z-z_D}) \in i\mathbb{R}$, en notant z l'affixe d'un point M du cercle. En notant $z=a+ib$, on obtient alors la condition $(a+3+i(b-1))(a-2+i(2-b)) \in i\mathbb{R}$, soit $(a+3)(a-2)+(b-2)(b-1)=0$. En développant, $a^2+b^2+a-3b-4=0$. Appartenir à la droite (BC) peut au contraire se traduire par la condition $(z-z_B)(\overline{z_C-z_B}) \in \mathbb{R}$, soit $(a-1+i(b+2)) \times (-5i) \in \mathbb{R}$, soit $-5(a-1)=0$. Ce qui donne très simplement $a=1$, équation qui ne devrait surprendre personne vu les affixes des points B et C. Reportons donc la condition $a=1$ dans l'équation de cercle pour trouver les intersections : $1+b^2+1-3b-4=0$, soit $b^2-3b-2=0$. Cette équation du second degré a pour discriminant 17, et pour racines $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$. Les deux points d'intersection de la droite et du cercle ont donc pour affixes $1+i\times\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $1+i\times\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

6. Pour le centre de gravité, il suffit de calculer $\frac{1}{3}(z_A+z_B+z_D)=\frac{1}{3}(-3+i+1-2i+2+2i)=\frac{1}{3}i$. Le centre de gravité du triangle a pour affixe $\frac{1}{3}i$.
Pour l'orthocentre, on cherche un point H d'affixe $a+ib$ tel que (AH) soit orthogonale à (BD) et (BH) à (AD). La première condition s'exprime de la façon suivante : $(\overline{z_H-z_A})(z_D-z_B) \in i\mathbb{R}$, soit $(a-ib+3+i)(1+4i) \in i\mathbb{R}$, donc $a+3+4b-4=0$, donc $a+4b=1$. De même, la deuxième condition s'exprime par $(a-ib-1-2i)(5+i) \in i\mathbb{R}$, donc $5a-5+b+2=0$, ce qui donne $5a+b=3$. On résout le petit système, par exemple par substitution : $a=1-4b$, donc $5-20b+b=3$, soit $b=\frac{2}{19}$, puis $a=1-4b=\frac{11}{19}$. L'orthocentre a donc pour affixe $\frac{11}{19}+\frac{2}{19}i$.
Le centre du cercle circonscrit (on va garder le plus dur pour la fin) Ω d'affixe $c+id$ se trouve à égale distance des trois points. La condition $\Omega A=\Omega B$ se traduit (en élevant au carré) par $|c+id+3-i|^2=|c+id-1+2i|^2$, soit $(c+3)^2+(d-1)^2=(c-1)^2+(d+2)^2$, donc $c^2+6c+9+d^2-2d+1=c^2-2c+1+d^2+4d+4$. On obtient finalement la simple équation $8c-6d=-5$ (qui est une équation cartésienne de droite, en l'occurence de la médiatrice du segment $[AB]$; on peut retrouver cette équation en partant du milieu de ce segment et en écrivant une condition d'orthogonalité). De même, la condition $\Omega A=\Omega D$ s'exprime par $|c+id+3-i|^2,=|c+id-2-2i|^2$, soit $c^2+6c+9+d^2-2d+1=c^2-4c+4+d^2-4d+4$, donc $10c+2d=-2$ (ou encore $5c+d=-1$). Encore un système à résoudre : $d=-1-5c$, donc $8c+6+30c=-5$, ce qui donne $c=-\frac{11}{38}$, puis $d=\frac{17}{38}$. Le centre du cercle circonscrit a pour affixe $-\frac{11}{38}+\frac{17}{38}i$.
Terminons avec le centre $I(e+if)$ du cercle inscrit. Si vous connaissez le résultat qui dit

que I est le barycentre des trois sommets du triangle affectés d'un poids égal à la longueur du côté opposé, c'est assez facile. Passer par les angles est franchement compliqué, mais on peut écrire une condition sur les arguments qui finit par donner une ignoble équation du second degré en e et f (ce qui est normal puisqu'un angle a deux bissectrices, l'une intérieure et l'autre extérieure) qu'il faut factoriser, et trier les solutions trouvées. Bref, du boulot pas très rigolo. On peut faire (un peu) plus simple. Normons le vecteur $\overrightarrow{AB}(4-3i)$, pour obtenir une affixe $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$, et considérons le point B' tel que $\overrightarrow{AB'}$ a pour affixe $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$, c'est-à-dire $B'\left(-\frac{11}{5}-\frac{2}{5}i\right)$. Ce point B' est situé sur la droite AB, à une distance 1 de A. Effectuons la même opération sur la droite AD : $\parallel \overrightarrow{AD} \parallel = \sqrt{26}$, on obtient le point $D'\left(-3+\frac{5}{\sqrt{26}}+i+\frac{1}{\sqrt{26}}i\right)$. Comme le triangle $AB'D'$ est isocèle en A avec les mêmes directions de côté issus de A que le triangle ABD, la bissectrice issue de A est confondue avec la médiatrice du segment $[B'D']$. Il faut un peu de courage pour en calculer une équation : $IB' = ID'$ donc $\left|e+if+\frac{11}{5}+\frac{2}{5}i\right|^2 = \left|e+if+3-\frac{5}{\sqrt{26}}-i-\frac{1}{\sqrt{26}}i\right|^2$, soit $\left(e-\frac{11}{5}\right)^2+\left(f+\frac{2}{5}\right)^2=\left(e+3-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2+\left(f-1-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2$. Après simplification (si j'ose dire), il reste $e\left(\frac{10}{\sqrt{26}}-\frac{52}{5}\right)+f\left(\frac{2}{\sqrt{26}}+\frac{14}{5}\right)=6-\frac{28}{\sqrt{26}}$. C'est bien une équation de droite, quoique fort indigeste. On devrait évidemment faire la même chose pour (par exemple) la bissectrice de $\widehat{BAD}$. On connait déjà (au signe près) un vecteur directeur de $\overrightarrow{BA}$, on peut prendre le point $A'\left(\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i\right)$. De l'autre côté, on calcule $\parallel \overrightarrow{BD} \parallel = \sqrt{1+16}=\sqrt{17}$, on obtient alors un point $D''\left(1+\frac{1}{\sqrt{17}}-2i+\frac{4}{\sqrt{17}}i\right)$. Je vous épargne la suite des calculs, complètement immondes à effectuer entièrement de façon exacte. On obtient finalement un centre du cercle inscrit dont les coordonnées sont à peu près : $I(0.158+0.578i)$. Sur le graphique, je n'ai pas placé les bissectrices pour ne pas surcharger, les hauteurs sont en bleu et les médiatrices en vert, on constate que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés.



Exercice 17 (* à **)

Commençons par les équations, normalement c'est assez facile :

- $z' = z + 3 - 2i$
- $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z$
- $z' - (1-2i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + 2i)$, soit $z' = iz - i - 2 + 1 - 2i = iz - 1 - 3i$
- On peut s'en sortir assez vite en remarquant que $f(z)$ est de la forme $z' = a\overline{z} + b$, et que par exemple $f(1) = i$ et $f(i) = 1$. On a donc $a + b = i$ et $-ai + b = 1$. En soustrayant les deux équations, $(1+i)a = i - 1$, donc $a = \frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)(1-i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$. On en déduit que $b = 0$ et $z' = i\overline{z}$.
- C'est une rotation d'angle π, donc $z' - 3i = -(z - 3i)$, soit $z' = -z + 6i$.
- Encore du cours : $z' + 2 - i = \frac{1}{2}(z + 2 - i)$, soit $z' = \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}i$.
- Allons-y pour la composée : $z' = \frac{1}{2}(-z + 6i) - 1 + \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}z - 1 + \frac{7}{2}i$.

Pour reconnaitre les transformations, ça peut être un peu plus compliqué :

- On a une composée de réflexion (par rapport à l'axe réel) et de translation (de vecteur d'affixe 3), ça ne se simplifie pas. Ce genre de composition ne peut se simplifier que si la translation est de vecteur orthogonal à l'axe de la réflexion (auquel cas la composée est simplement une réflexion).
- Équation de similitude directe, on cherche le point fixe : $z = (1-i)z + 2i - 1 \Leftrightarrow z = \frac{2i-1}{i} = 2 + i$. Par ailleurs, $|1 - i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$. L'application f est donc la composée d'une rotation de centre $A(2+i)$ et de rapport $\sqrt{2}$, et d'une rotation de même centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
- Composée d'une réflexion d'axe réel et d'homothétie de centre 0 et de rapport 2, rien à ajouter.
- Encore une similitude directe, cherchons le point fixe : $z = 3z - 4i + 2 \Leftrightarrow z = \frac{2-4i}{-2} = -1 + 2i$. Calculer le module et l'argument de 3 ne devrait pas poser trop de problème. L'application est donc l'homothétie de centre $A(-1+2i)$ et de rapport 3.
- Posons $g(z) = -iz + 2i - 1$, et cherchons le point fixe de cette isométrie : $z = \frac{2i-1}{1+i} = \frac{(2i-1)(1-i)}{2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. Par ailleurs, on a évidemment $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. L'application f est donc la composée d'une rotation de centre $A\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et d'une symétrie par rapport à l'axe réel.

Exercice 18 (**)

1. Du simple calcul : $f(1) = 3$; $f(2i - 5) = -4 + 25 - 20i + 2i - 5 + 1 = 17 - 18i$; et $f(e^{i\frac{\pi}{4}}) = i + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + 1 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$.
2. Il faut résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 1 + i$, soit $z^2 + z - i = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 1 + 4i$. Cherchon une valeur de $\delta = a + ib$ telle que $\delta^2 = \Delta$. L'égalité des parties réelle et imaginaire donne $a^2 - b^2 = 1$ et $2ab = 4$, et celle du module donne $a^2 + b^2 = \sqrt{17}$. On en déduit que $2a^2 = 1 + \sqrt{17}$ et $2b^2 = \sqrt{17} - 1$. Les nombres a et b devant être de même signe, on peut choisir $\delta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$. Les antécédents de $1 + i$ sont alors au nombre

de deux, ce sont les nombres $z_1 = \dfrac{-1+\delta}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1-\delta}{2}$ (expliciter plus n'a absolument aucun intérêt).

3. Il suffit de résoudre l'équation $f(z) = z$, soit $z^2 = -1$. Il y a donc deux points invariants, i et $-i$.
4. En notant $z = a+ib$, on a $f(z) = a^2-b^2+2iab+a+ib+1$. Cette image a une partie imaginaire nulle si $2ab+b = 0$, soit $b(2a+1) = 0$. On doit donc avoir soit $b = 0$ (c'est-à-dire que z est en fait un nombre réel, ces solutions n'ont rien de surprenant puisque les nombres réels ont de façon évidente une image réelle par f), soit $a = -\dfrac{1}{2}$, ce qui correspond aux nombres complexes de partie imaginaire $-\dfrac{1}{2}$.
5. Cette condition peut se traduire par le fait que $(\overline{f(z)-1})(z-1) \in \mathbb{R}$, soit $(a^2-b^2-2iab+a-ib)(a+ib-1) \in \mathbb{R}$. La partie imaginaire de ce produit doit donc être nulle, ce qui se traduit par $a^2b-b^3-2a^2b+2ab+ab-ab+b = 0$, soit $b(-b^2-a^2+2a+1) = 0$. La condition $b = 0$ donne comme tout à l'heure comme solutions tout l'axe réel (encore fois, pas de surprise, si z est réel, 1, z et $f(z)$ sont alignés sur l'axe réel), la parenthèse est une équation de cercle : $a^2+b^2-2a-1 = 0$ donne $(a-1)^2-1+b^2-1 = 0$, c'est-à-dire $(a-1)^2+b^2 = 2$, soit un cercle de centre $A(1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 19 (**)

1. Il faut résoudre l'équation $\dfrac{z^2}{z-2i} = 1+i$, soit $z^2-(1+i)z-2+2i = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (1+i)^2-4(-2+2i) = 1+2i-1+8-8i = 8-6i$. On recherche une racine carrée du discriminant sous la forme $\delta = a+ib$. La condition $\delta^2 = \Delta$ donne $a^2-b^2+2iab = 8-6i$, soit $a^2-b^2 = 8$ et $2ab = -6$. On ajoute la condition sur le module : $|\delta|^2 = a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{36+64} = 10$. En additionnant la première et la troisième équation obtenues, on trouve $2a^2 = 18$, en les soustrayant $2b^2 = 2$. On en déduit que $a = \pm 3$ et $b = \pm 1$, soit en utilisant le fait que a et b sont de signe contraire (deuxième équation), $\delta = 3-i$ ou $\delta = -3+i$. Les deux solutions de l'équation initiale sont donc $z_1 = \dfrac{1+i+3-i}{2} = 2$ et $z_2 = \dfrac{1+i-3+i}{2} = i-1$, qui sont donc les deux antécédents de $1+i$ par f.
2. Le principe est le même : l'équation $f(z) = w$ se ramène à $z^2-wz+2iw = 0$, elle a toujours des solutions. Plus précisément, l'équation aura deux solutions, sauf si son discriminant est nul, auquel cas elle n'en aura qu'une. Le discriminant en question vaut $\Delta = w^2-8iw$, il s'annule lorsque $w = 0$ ou $w = 8i$. Les deux nombres complexes 0 et $8i$ ont donc un unique antécédent par f (il s'agit de 0 pour 0 et de $4i$ pour $8i$), tous les autres en ont deux.
3. L'application f est surjective (tout nombre complexe a au moins un antécédent), mais pas injective puisque beaucoup d'éléments ont deux antécédents par f.

Exercice 20 (**)

1. Le plus simple est d'expliciter l'application réciproque : si $Z = \dfrac{z+1}{z-2}$, alors $zZ-2Z-z-1 = 0$, soit $z = \dfrac{2Z+1}{Z-1}$. Cette application g, définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, vérifie $f \circ g = id$ et $g \circ f = id$ (sur leurs ensembles de définition respectifs), ce qui prouve que f est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.
2. C'est en fait très simple : si $f(z) \in \mathbb{U}$, c'est que $|f(z)| = 1$, soit $|z+1| = |z-2|$. En posant $z = a+ib$ et en élevant tout au carré, on obtient $(a+1)^2+b^2 = (a-2)^2+b^2$, donc $2a+1 = -4a+4$, ce qui donne $a = \dfrac{1}{2}$. L'image réciproque de $\mathbb{U}$ est donc la droite

des complexes de partie réelle $\frac{1}{2}$. Pour obtenir l'image réciproque du disque unité, il suffit de remplacer les égalités par des inégalités, on obtient la condition $a \leqslant \frac{1}{2}$, c'est -à-dire que z appartient à un demi-plan délimité par la droite précédente.

3. Il suffit de choisir parmi les nombres complexes de partie réelle $\frac{1}{2}$ ceux qui ont pour module 1. Il y en a deux, $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
4. Pour que $f(f(z))$ soit défini, on doit avoir $f(z) \neq 2$, c'est-à-dire au vu du calcul de la première question $z \neq \frac{2 \times 2 + 1}{2 - 1} = 5$. L'application $f \circ f$ est donc définie sur $\mathbb{C}\backslash\{2, 5\}$. Elle est évidemment bijective pusique $g \circ g$ sera clairement sa réciproque. L'ensemble vers lequel f est bijective est donc le domaine de définition de $g \circ g$, qui est définie si $g(z) \neq 1$, donc si $z \neq f(1) = -2$. Finalement, $f \circ f$ est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{2, 5\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{-2, 1\}$.

Exercice 21 (***)

1. C'est très très simple, la réciproque de f est f elle-même puisque $f(f(z)) = z$ quel que soit z dans $\mathbb{C}^*$.
2. Si on part de $z = a + ib$, on peut écrire $\frac{1}{z} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}$, donc $f(z)$ a une partie réelle strictement positive si $a > 0$, c'est-à-dire si z lui-même a une partie réelle strictement positive. Autrement dit, le demi-plan ouvert situé à droite de l'axe imaginaire pur est globalement invariant par f.
3. Prenons par exemple $A(1)$ et $B(i)$ (on peut choisir encore beaucoup plus simple). Le milieu de AB a pour affixe $\frac{1+i}{2}$, donc pour image $\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i$. Pourtant, le milieu du segment $[A'B']$ reliant les images de A et B a pour affixe $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{2}(1 - i)$. Un mystérieux facteur $\frac{1}{2}$ est apparu, le mileu des images n'est pas l'image du milieu.
4. Il faut bien sûr supprimer 0 de chacun des deux axes. L'application f effectue une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans lui-même (c'est une propriété de la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$. De même, $\frac{1}{ki} \in i\mathbb{R}$, et f est bijective de $i\mathbb{R}\backslash\{0\}$ dans lui-même.
5. Une droite passant par l'origine peut être décrite comme l'ensemble des multiples réels d'un nombre complexe z donné (par exemple tous les multiples réels de $1 + i$ forment la première bissectrice des deux axes). Soit donc une telle droite avec $z = a + ib$ fixé, si k est un réel non nul, $f(kz) = \frac{1}{k(a + ib)} = \frac{a - ib}{k(a^2 + b^2)}$. Toutes ces images sont donc également situées sur une droite, celle constituée de tous les multiples réels de $\overline{z}$. Autrement dit, l'image d'une droite passant par l'origine est la symétrique de cette droite par rapport à l'axe réel.
6. Soit M un point d'affixe z appartenant à la droite (AB), on a donc $(\overline{z - z_A})(z - z_B) \in \mathbb{R}$, soit $\overline{z}z - z - i\overline{z} + i \in \mathbb{R}$, soit, en notant $z = a + ib$, $-b - a + 1 = 0$, soit $b = 1 - a$. On a donc $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$. Calculons la distance de cet inverse au point $C\left(\frac{1-i}{2}\right)$: $\left|\frac{1}{a+ib} - \frac{1-i}{2}\right| = \left|\frac{2 - (a+ib)(1-i)}{2(a+ib)}\right| = \left|\frac{2 - a - b + i(-b + a)}{2(a+ib)}\right| = \left|\frac{1 + i(-1 + 2a)}{2(a+ib)}\right|$ en utilisant la relation $b = 1_a$. On obtient donc, en élevant au carré, $\frac{1 + (2a-1)^2}{4(a^2 + b^2)} = \frac{1 + 1 + 4a^2 - 4a}{4(a^2 + (1-a)^2)} = \frac{2 - 4a + 4a^2}{8a^2 - 8a + 4} = \frac{1}{2}$. Les points se trouvent donc tous sur le cercle de centre C et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Notons que $\left|\frac{1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Le cercle en question passe donc par l'origine du repère. Pour déterminer

quels sont les points du cercle ayant un antécédent sur la droite, puisque f est sa propre réciproque, il suffit de déterminer les images des points du cercle : $\left|z - \frac{1-i}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$ ce qui donne en multipliant par 2 et en développant, $2z\overline{z} - (1+i)z - (1-i)\overline{z} + 1 = 1$. La simplification est bienvenue, en divisant tout par $z\overline{z}$ (on a déjà exclu 0), on trouve $2 - \frac{1+i}{\overline{z}} - \frac{1-i}{z} = 0$. Posons $Z = f(z) = \frac{1}{z}$, on a donc $2 - (1+i)\overline{Z} - (1-i)Z = 0$. Ecrivons maintenant $Z = a + ib$, on a donc $2 - (1+i)(a - ib) - (1-i)(a + ib) = 0$, soit $2 - a + ib - ia - b - a - ib + ia - b = 0$, soit $2 - 2a - 2b = 0$. On retrouve exactement l'équation de la droite dont on est partis plus haut.

7. Il est plus simple de partir de l'équation d'un cercle passant par l'origine, de la forme $|z - z_D|^2 = |z_D|^2$, où D est le centre du cercle. En développant, on trouve $z\overline{z} - z_D\overline{z} - \overline{z_D}z = 0$ (le reste se simplifie). En posant $Z = \frac{1}{z}$ et en faisant la même manipulation que ci-dessus, on trouve donc $1 - z_D Z - \overline{z_D Z} = 0$. Autrement dit $1 = 2\text{Re }(z_D Z)$, soit en notant $Z = a + ib$ et $z_D = x + iy$, $2ax - 2by = 1$. C'est l'équation d'une droite (qui ne peut pas passer par l'origine), et toute droite ne passant pas par l'origine peut se mettre sous cette forme. Comme f est sa propre réciproque, l'image d'une droite ne passant pas par l'origine est donc toujours un cercle passant par l'origine.
8. On a déjà répondu à cette question lors du calcul précédent, c'est une droite ne passant pas par l'origine.
9. On sait que $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. L'image du cercle trigonométrique est le cercle trigonométrique lui-même. Pour un cercle de centre r centré en l'origine, on considère des nombres complexes z de la forme $re^{i\theta}$, qui ont des inverses de la forme $\frac{1}{r}e^{-i\theta}$. L'image du cercle est donc également un cercle de centre O, mais de rayon $\frac{1}{r}$.
10. Partons de son équation $z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + k = 0$ (où k est un réel non nul quand le cercle ne passe pas par l'origine). En divisant tout par $z\overline{z}$ et en posant $Z = \frac{1}{z}$, on obtient $1 - aZ - \overline{a}\overline{Z} + kZ\overline{Z} = 0$, soit $k\left|Z - \frac{\overline{a}}{k}\right|^2 = k'$, où k' est toujours une constante (mais plus égale à k). On retombe donc sur une équation de cercle de centre d'afixe $\frac{\overline{a}}{k}$. en tout cas, l'image d'un cercle qui ne passe pas par l'origine est un cercle (ne passant pas par l'origine non plus pusiqu'en appliquant la réciproque égale à f il faut retomber sur le cercle initial). Globalement, on a prouvé dans cet exercice que l'ensemble des droites et des cercles du plan est globalement invariant par cette opération d'inversion.

Exercice 22 (****)

Le coloriage est impossible. Effectuons un raisonnement par l'absurde, supposons un tel coloriage réalisé et considérons un losange $ABCD$ dont les quatre côtés ont pour longueur 1, la petite diagonale pour longueur 1 également et la grande diagonale pour longueur $\sqrt{3}$ (il suffit pour cela d'accoler deux triangles équilatéraux). Supposons par exemple que les sommets A et C soient opposés par la grande diagonale. Si A est par exemple colorié en vert, B et D doivent être de couleur non verte puisqu'à distance 1 de A, et de couleur différente puisqu'eux-même sont à distance 1 l'un de l'autre. Ils sont donc coloriés en bleu et rouge. Cela impose à C d'être de couleur verte puisqu'il est à distance 1 de B et D. Ainsi, on voit que les deux points A et C, qui sont à distance $\sqrt{3}$ l'un de l'autre, sont de même couleur. Cette construction permet de prouver que deux points à distance $\sqrt{3}$ seront toujours de la même couleur, car on peut les placer comme sommets opposés par la grande diagonale d'un losange tel qu'étudié ci-dessus. Considérons maintenant un cercle de rayon $\sqrt{3}$. Tous les points de ce cercle sont de la même couleur que le centre du cercle au vu du raisonnement précédent, donc sont tous de la même couleur. Or, sur ce cercle, on peut certainement trouver deux points à distance 1 l'un de l'autre. Ces deux points étant de la même couleur, on est en contradiction avec notre hypothèse, qui est donc irréalisable.

Exercice 23 (***)

1. Calculons donc : $f(-i) = -i - \frac{1}{i} = -i + i = 0$; $f(1+i) = 1+i+\dfrac{1}{1+i} = 1+i+\dfrac{1-i}{2} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$; et enfin $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -1$.
2. Il s'agit cette fois de résoudre l'équation $z + \dfrac{1}{z} = i$, soit $z^2 - iz + 1 = 0$ (la multiplication par z ne pose pas de problème puisque $z = 0$ ne peut pas être solution de l'équation). Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = -1 - 4 = -5$ et admet donc pour racines $z_1 = \dfrac{i - i\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}i$, et $z_2 = \dfrac{i + i\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i$. Dans la mesure où Δ est ici réel, il est bien sûr inutile d'appliquer les méthodes compliquées vu en cours cette année.
3. L'application f ne peut certainement pas être injective puisqu'on vient de voir que le nombre i avait deux antécédents par f. Par contre, l'équation $f(z) = a$, qui se ramène à l'équation du second degré $z^2 - az + 1 = 0$, admet toujours des solutions complexes non nulles, ce qui prouve la sujectivité de f.
4. On calcule donc $f(a+ib) = a+ib+\dfrac{1}{a+ib} = a+ib+\dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{a^3+ab^2+a+i(ba^2+b^3-b)}{a^2+b^2}$.
   Autrement dit, la partie réelle de $f(z)$ est égale à $\dfrac{a^3+ab^2+a}{a^2+b^2}$ et sa partie imaginaire est égale à $\dfrac{a^2b+b^3-b}{a^2+b^2}$.
5. On souhaite que $f(z) \in i\mathbb{R}$, c'est-à-dire que Re $(f(z)) = 0$. D'après la question précédente, celà revient à imposer la condition $a^3 + ab^2 + a = 0$, soit $a(a^2 + b^2 + 1) = 0$. Autrement dit, le nombre z doit être lui-même imaginaire pur ($a = 0$), l'équation $a^2 + b^2 + 1 = 0$ n'ayant aucune solution.
   De même $f(z)$ sera réel si Im $(f(z)) = 0$, donc si $a^2b+b^3-b = 0$ ou encore $b(a^2+b^2-1) = 0$. Cette fois-ci, le nombre z doit être lui-même réel ($b = 0$) ou appartenir à l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (l'équation $a^2+b^2 = 1$ étant celle du cercle trigonométrique). Je me dispense d'un petit dessin tant les résultats sont triviaux.
6. (a) On utilise évidemment la formule de récurrence double : $g_2(z) = z \times g_1(z) - g_0(z) = z^2 - 2$, puis $g_3(z) = z(z^2-2) - z = z^3 - 3z$; et enfin $g_4(z) = z(z^3-3z) - (z^2-2) = z^4 - 4z^2 + 2$.
   (b) L'équation $g_2(z) = 0$ est équivalente à $z^2 = 2$, et a donc pour solutions $z_1 = \sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{2}$.

   L'équation $g_3(z) = 0$ peut s'écrire sous la forme $z(z^2-3) = 0$ et a donc pour solutions $z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt{3}$ et $z_5 = -\sqrt{3}$.

   Un peu plus de travail pour la dernière équation, on va résoudre $z^4 - 4z^2 + 2 = 0$ en posant $Z = z^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $Z^2 - 4Z + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 16 - 8 = 8$, et admet donc pour racines $Z_1 = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$ et $Z_2 = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$. Ces deux nombres étant des réels positifs, on en déduit sans difficulté les quatre solutions de l'équation $g_4(z) = 0$: $z_6 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$; $z_7 = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $z_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $z_9 = -\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

(c) On va procéder logiquement par récurrence double. Vérifions la propriété au rang 0 : $g_0(f(z)) = 2$ puisque la fonction g est constante égale à 2, et $f(z^0) = f(1) = 1 + 1 + 2$, donc l'égalité est bien vérifiée pour $n = 0$. Vérifions maintenant la propriété au rang 1 : $g_1(f(z)) = f(z) = z + \frac{1}{z}$, et $f(z^1) = f(z)$, donc la propriété reste vraie au rang 1. Supposons désormais que, pour un entier n fixé, on ait à la fois $g_n(f(z)) = f(z^n) = z^n + \frac{1}{z^n}$, et $g_{n+1}(f(z)) = f(z^{n+1}) = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}$, alors la définition par récurrence des fonctions g_n permet d'écrire que $g_{n+2}(f(z)) = f(z) \times g_{n+1}(f(z)) - g_n(f(z)) = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - z^n - \frac{1}{z^n} = z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n} = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = f(z^{n+2})$, ce qui est exactement ce qu'on souhait prouver. La propriété est doublement initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

(d) En posant $Z = z^n$, l'équation $f(z^n) = 0$ s'écrit très simplement sous la forme $Z + \frac{1}{Z} = 0$, soit $Z^2 + 1 = 0$ et donc $Z = \pm i$ (la multiplication par Z ne pose pas de problème, $Z = 0$ ne pouvant être solution de l'équation). Il reste donc à calculer les racines n-èmes des nombres i et $-i$. On écrit pour celà $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. En cherchant z sous sa forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, on veut donc que $z^n = r^n e^{in\theta}$ soit égal à $e^{i\frac{\pi}{2}}$, ce qui se produira si module et arguments sont égaux (modulo 2π pour l'argument), donc si $r^n = 1$, ce qui implique $r = 1$, et $n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, soit $\theta \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{2\pi}{n}\right]$. Autrement dit, $z = e^{i(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n})}$, avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$ De même, on aura $z^n = -i$ si $z = e^{-i(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n})}$, pour les mêmes valeurs de k. On peut en fait regrouper les deux conditions en remplaçant simplement dans la résolution de la première équation la condition sur les aguments par $n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ (on trouve ainsi à la fois le cas i et le cas $-i$), ce qui donne alors plus simplement $z_k = e^{i(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})}$, avec $k \in \{0, \dots, 2n-1\}$.

D'après la relation démontrée à la question précédente, les nombres de la forme $f(z_k)$ vérifieront $g_n(z) = 0$, puisque $f(z_k^n) = 0 \Rightarrow g_n(f(z_k)) = 0$. Calculons donc $f(z_k) = e^{i(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})} + e^{-i(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$. Ces nombres sont distincts lorsque k varie entre 0 et $n-1$ (les angles à l'intérieur du cosinus sont alors tous distincts et compris dans l'intervalle $[0, \pi]$), ce qui nous donne déjà n solutions distinctes de l'équation $g(z) = 0$. Par exemple, pour $n = 3$, on retrouve les valeurs $2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; $2\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 0$ et $2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$ qu'on avait trouvées plus haut. Pour être certains que l'équation ne peut pas avoir d'autres solutions que celles-ci, on peut par exemple utiliser le fait que g_n est une fonction polynômiale de degré n (ce qui se prouve facilement par récurrence double), et donc ne peut pas s'annuler plus de n fois. Le calcul qu'on vient d'effectuer prouve en fait que toutes les racines de ce polynôme de degré n sont des nombres réels, et même qu'elles sont toutes comprises dans l'intervalle $[-2, 2]$ (puisqu'elles sont de la forme $2\cos(\alpha)$ pour un certain angle α).

(e) En notant donc $u_n = g_n\left(\frac{5}{2}\right)$ et en revenant à la définition récursive des fonctions g_n, on a la relation $u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n$, qui est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Comme on n'a pas encore vu ça ensemble en cours, cette question était difficilement faisable pour vous pour l'instant. Je vous donne quand même les calculs, qui vont vous rappeler des souvenirs de méthodes bien connues sur les équations différentielles. L'équation caractéristique de la récurrence est $r^2 - \frac{5}{2}r + 1 = 0$, qui admet pour discriminant $\Delta = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$, et pour racines $r_1 = \frac{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 2$ et $r_2 = \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = A \times 2^n + \dfrac{B}{2^n}$, où A et B sont deux constantes réelles. Les conditions initiales vont nous permettre de déterminer ces constantes : $u_0 = g_0\left(\dfrac{5}{2}\right) = 2$, donc $A + B = 2$, et $u_1 = g_1\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$, donc $2A + \dfrac{B}{2} = \dfrac{5}{2}$. Le système se résout assez trivialement puisqu'on obtient $A = B = 1$, donc $u_n = 2^n + \dfrac{1}{2^n}$. Autrement dit, on constate que $g_n\left(\dfrac{5}{2}\right) = f(2^n)$, ce qui est tout à fait cohérent avec le résultat de la question c et le fait que $\dfrac{5}{2} = 2 + \dfrac{1}{2} = f(2)$.

Problème 1 : étude d'une application complexe (**)

1. (a) On doit donc résoudre l'équation $f(z) = z$, c'est-à-dire $z = 2z(1-z)$, ou encore $z(1-2+2z) = 0$. On trouve donc deux valeurs possibles : $z = 0$ et $z = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Commençons par résoudre $f(z) = -4$, soit $-2z^2 + 2z + 4 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4 + 32 = 36$, et admet deux racines $z_1 = \dfrac{-2+6}{-4} = -1$, et $z_2 = \dfrac{-2-6}{-4} = 2$.
   Passons à $f(z) = 2 + 2i$, qui donne $-2z^2 + 2z - 2 - i = 0$, qu'on peut écrire plus simplement $z^2 - z + 1 + i = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i$. Cherchons $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, on obtient les deux équations $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = -4$. On peut ajouter la condition sur le module $a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5$. En additionnant et soustrayant comme d'habitude, $2a^2 = 2$, soit $a = \pm 1$ et $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$. Comme a et b doivent être de signe contraire, on peut prendre $\delta = 1 - 2i$. On obtient alors comme antécédents $z_1 = \dfrac{1+1-2i}{2} = 1 - i$, et $z_2 = \dfrac{1-1+2i}{2} = i$.

2. Examinons la condition $f(z_1) = f(z_2)$: $2z_1 - 2z_1^2 = 2z_2 - 2z_2^2$, soit en divisant tout par deux $z_1 - z_2 = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$. Si on exclut le cas peu intéressant $z_1 = z_2$, on peut diviser par $z_1 - z_2$ pour obtenir $1 = z_1 + z_2$, soit $z_2 = 1 - z_1$. Autrement dit, $z_2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - z_1$, ce qui signifie que les points d'affixe z_1 et z_2 sont symétriques par rapport au point d'affixe $\dfrac{1}{2}$. En particulier, l'application n'est pas injective puisque, sauf dans l'unique cas particulier $z = \dfrac{1}{2}$, il existe toujours un deuxième nombre complexe ayant la même image par f qu'un nombre complexe donné. Pour faire très simple, on peut d'ailleurs se contenter de reprendre le résultat de la première question, et dire que $f(-1) = f(2)$.

3. L'équation $f(z) = a$, où $a \in \mathbb{C}$, est une équation de second degré, elle aura toujours des solutions. Tout nombre complexe a donc au moins un antécédent par f. Le nombre a aura un seul antécédent si l'équation $2z - 2z^2 = a$ a un discriminant nul, soit $4 - 8a = 0$, donc $a = \dfrac{1}{2}$. Le nombre réel $\dfrac{1}{2}$ est donc le seul à avoir un unique antécédent (en l'occurence lui-même).

4. (a) Calculer l'image de l'axe réel est étrangement plus compliqué que pour image réciproque (question suivante), si $x \in \mathbb{R}$, on a toujours $f(x) = 2x(1-x) \in \mathbb{R}$. Pour déterminer précisément quelles sont les valeurs prises par cette fonction, on peut l'étudier avec les techniques classiques sur les fonctions d'une variable réelle. Ainsi, $f'(x) = -4x+2$ s'annule en $x = \dfrac{1}{2}$, comme $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, on obtient pour f le tableau de variations

suivant :

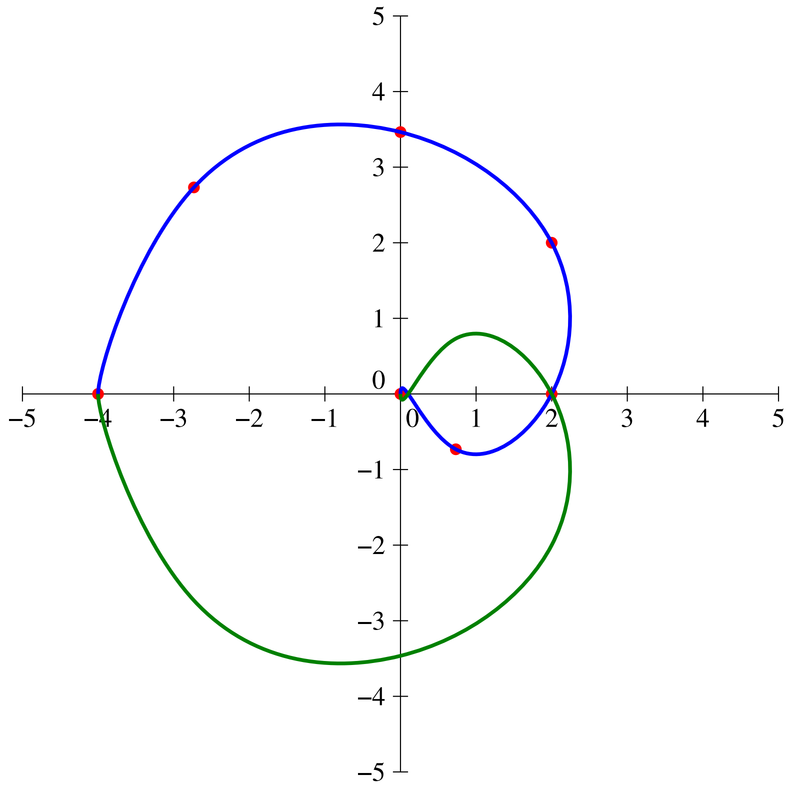
x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f		$\frac{1}{2}$	
	$\nearrow$		$\searrow$
	$-\infty$		$-\infty$

La fonction f prend donc sur l'axe réel toutes les valeurs réelles inférieures à $-\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $f(\mathbb{R}) = \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$.

(b) Allons-y peu subtilement. Si on pose $z = a + ib$, on a $f(z) = 2(a+ib)(1-a-ib) = 2(a - a^2 - iab + ib - iab + b^2)$, qui est réel si $b - 2ab = 0$, soit $b(1-2a) = 0$. On peut donc avoir $b = 0$ (c'est-à-dire que z est un réel), ou $a = \dfrac{1}{2}$ (droite parallèle à l'axe imaginaire).

5. (a) Calculons $f(e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}(1 - e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2e^{i\frac{3\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$ $= 4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{3\theta}{2}} = 4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\theta-\pi}{2}}$. En particulier, on trouve un module égal à $4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ (en prenant $\theta \in [0; 2\pi]$ pour toujours avoir un sinus de l'angle moitié positif) et un argument de $\dfrac{3\theta - \pi}{2}$.

(b) Pour $\theta = 0$, $f(e^{i\theta}) = f(1) = 0$; pour $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, le module vaut $4\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ et l'argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi\right) = -\dfrac{\pi}{4}$. On peut aussi calculer directement $f(e^{i\frac{\pi}{6}}) = \sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3})$. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, on a un module $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$, et un argument de $\dfrac{1}{2}(\pi - \pi) = 0$, donc $f(e^{i\frac{\pi}{3}}) = 2$. Ensuite, si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, module $2\sqrt{2}$ et argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \pi\right) = \dfrac{\pi}{4}$, donc $f(e^{i\theta}) = 2 + 2i$. On enchaine avec $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, module $2\sqrt{3}$, argument $\dfrac{1}{2}(2\pi - \pi) = \dfrac{\pi}{2}$, soit $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 2\sqrt{3}i$. Pour $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$, module $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{15\pi}{6} - \pi\right) = \dfrac{3\pi}{4}$, soit $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = -\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$. Enfin, pour $\theta = \pi$, $f(-1) = -4$. Ce qui donne une allure ressemblant à ceci (les points sont en rouge, la courbe en bleu, ça doit ressembler à une sorte de spirale, en vert la symétrique pour l'autre moitié de cercle trigonométrique) :



(c) Il suffit de calculer $f(e^{i(2\pi-\theta)})$: le module est le même que pour $f(e^{i\theta})$, l'argument vaut $\dfrac{3(2\pi-\theta)-\pi}{2} = \dfrac{5\pi-3\theta}{2} = -\dfrac{3\theta-\pi}{2} + 2\pi$, donc l'argument est opposé à celui de $f(e^{i\theta})$. Autrement dit, les images des points situés en bas du cercle trigonométrique sont les conjugués des images des points du haut. Il suffit donc de faire une symétrie par rapport à l'axe réel pour obtenir la deuxième moitié de l'image du cercle trigonométrique.

Problème 2 : résolution d'équations du troisième degré (***)

I. Un cas particulier

1. Puisque $z = Z + 2$, on peut écrire $(Z+2)^3 - 6(Z+2)^2 + 9(Z+2) - 1 = 0$, soit $Z^3 + 6Z^2 + 12Z + 8 - 6Z^2 - 24Z - 24 + 9Z + 18 - 1 = 0$, donc $Z^3 - 3Z + 1 = 0$.
2. Encore du calcul peu subtil, $(u+v)^3 - 3(u+v) + 1 = 0$ donne $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u - 3v + 1 = 0$. En factorisant ce qu'on peut par $u+v$, $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 3(u+v) + 1 = 0$, ce qui donne bien $u^3 + v^3 + 3(uv-1)(u+v) + 1 = 0$.
3. Si on impose $uv = 1$, on a donc $u^3 + v^3 + 1 = 0$, soit $u^3 + v^3 = -1$. Comme par ailleurs $u^3v^3 = (uv)^3 = 1^3 = 1$, on connait le produit P et la somme S des deux nombres u et v, ils sont donc solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$, soit ici $x^2 + x + 1 = 0$.
4. L'équation a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, et admet donc pour racines complexes conjuguées $x_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $x_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. On peut donc poser $u^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $v^3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (ou le contraire, ça n'a aucune importance). Les valeurs possibles pour u sont donc les racines cubiques de $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, c'est-à-dire $u_1 = e^{i\frac{2\pi}{9}}$; $u_2 = e^{i\frac{8\pi}{9}}$ et $u_3 = e^{i\frac{14\pi}{9}}$. De même, les valeurs possibles de v sont $v_1 = e^{-i\frac{2\pi}{9}}$; $v_2 = e^{-i\frac{8\pi}{9}}$ et $v_3 = e^{-i\frac{14\pi}{9}}$.
5. Avec la condition ajoutée $uv = 1$, les trois couples possibles sont (u_1, v_1) ; (u_2, v_2) et (u_3, v_3), qui donnent donc les trois valeurs possible de Z : $Z_1 = u_1 + v_1 = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$; $Z_2 = u_2 + v_2 =$

$2\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right)$ et $Z_3 = u_3 + v_3 = 2\cos\left(\dfrac{14\pi}{9}\right)$. On en déduit les solutions de l'équation initiale : $z_1 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$; $z_2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right)$ et $z_3 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{14\pi}{9}\right)$. Remarquons que, malgré l'utilisation des nombres complexes, on obtient ici trois solution réelles.

II. Généralisation

1. Développons comme précédemment $(Z-k)^3 + a(Z-k)^2 + b(Z-k) + c = Z^3 - 3kZ^2 + 9k^2Z - k^3 + aZ^2 - 2akZ + ak^2 + bZ - bk + c = Z^3 + (a-3k)Z^2 + (9k^2 - 2ak + b)Z - k^3 + ak^2 - bk + c$. Si on veut faire disparaitre le terme en Z^2, il suffit de prendre $k = \dfrac{a}{3}$. On obtiendra alors $p = 9k^2 - 2ak + b = a^2 - 2\dfrac{a^2}{3} + b = \dfrac{a^2}{3} + b$; et $q = -k^3 + ak^2 - bk + c = -\dfrac{a^3}{27} + \dfrac{a^3}{9} - \dfrac{ab}{3} + c = -\dfrac{2a^2}{27} + \dfrac{ab}{3} + c$.
2. On procède comme dans la première partie : $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$ donne $u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0$, soit $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0$. En posant $uv = -\dfrac{p}{3}$, on fait disparaitre le terme du milieu pour mettre sous la forme demandée.
3. Comme tout à l'heure, on a $U + V = -q$, et $UV = (uv)^3 = -\dfrac{p^3}{27}$.
4. Les nombres U et V sont donc solutions de l'équation $x^2 + qx - \dfrac{p^3}{27}$, qui a pour discriminant $\Delta = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$. Si $\Delta > 0$, on trouvera donc $U = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$ et $V = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$. Si $\Delta < 0$, on aura des valeurs complexes conjuguées $U = -\dfrac{q}{2} + i\sqrt{-\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}$, et $V = -\dfrac{q}{2} - i\sqrt{-\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}$. Si $\Delta = 0$, on aura $U = V$, ce qui n'est pas gênant pour la suite de la résolution. On cherche ensuite les racines cubiques (complexes) des deux nombres U et V, on les apparie de façon à avoir un produit égal à $-\dfrac{p}{3}$ (il y aura toujours trois couples possibles), en calculant les sommes $u + v$ pour chacun des trois couples on trouve trois valeurs possibles pour Z, qui donnent les trois solutions $z = Z + k$.
5. Allons-y en commençant par poser $Z = z - 1$, on a donc $(Z+1)^3 - 3(Z+1)^2 + (9-6i)(Z+1) - 5 + 12i = 0$, soit $Z^3 + 3Z^2 + 3Z + 1 - 3Z^2 - 6Z - 3 + (9-6i)Z + 9 - 6i - 5 + 12i = 0$. En regroupant un peu, $Z^3 + 6(1-i)Z + 2 + 6i = 0$. On pose maintenant $Z = u + v$ pour obtenir $u^3 + 3u^3v + 3uv^2 + v^3 + 6(1-i)(u+v) + 2 + 6i = 0$, soit $u^3 + v^3 + 3(u+v)(uv + 2(1-i)) + 2 + 6i = 0$. On va donc imposer la condition supplémentaire $uv = 2i - 2$, et poser $U = u^3$ et $V = v^3$ pour obtenir les équations $U + V = -2 - 6i$, et $UV = (2i-2)^3 = -8i + 24 + 24i - 8 = 16 + 16i$. Les nombres U et V sont solution de l'équation du second degré $x^2 + (2+6i)x + 16 + 16i = 0$. Son discriminant est égal à $\Delta = (2+6i)^2 - 64 - 64i = 4 + 24i - 36 - 64 - 64i = -96 - 40i$. On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, ce qui donne les conditions $a^2 - b^2 = -96$ et $2ab = -40$. On a alors le choix entre être très courageux et calculer le module de Δ (qui vaut 104), ou bien être observateur et remarquer que $a = 2$ et $b = -10$ est un couple solution. On peut donc prendre $\delta = 2 - 10i$, et trouver les solutions $U = \dfrac{-2 - 6i + 2 - 10i}{2} = -8i$ et $V = \dfrac{-2 - 6i - 2 + 10i}{2} = -2 + 2i$. Ouf, on obtient deux nombres dont les racines cubiques sont faciles à calculer. Pour u, on peut prendre $u_1 = 2i$, $u_2 = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$ et $u_3 = 2ie^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$. Pour $V = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, on obtient $v_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$; $v_2 = (1+i)e^{i\frac{2\pi}{3}} = (1+i)\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $v_3 = (1+i)e^{i\frac{4\pi}{3}} =$

$(1+i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$. Comme $2i(1+i)=-2+2i$, le couple (u_1,v_1) est une solution correcte, qui mène à $Z=u_1+v_1=1+3i$. De même, $u_2+v_3=2ie^{i\frac{2\pi}{3}}\times(1+i)e^{i\frac{4\pi}{3}}=-2+2i$, donc $Z=u_2+v_3=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{-3-\sqrt{3}}{2}$ convient. Enfin, la troisième possibilité est $Z_3=u_3+v_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-3}{2}$. On en déduit aisément les solutions de l'équation initiale en se souvenant que $z=Z+1$: $z_1=2+3i$; $z_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ et $z_3=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-3}{2}$.

Problème 3 : homographies du plan complexe (***)

I. Un cas particulier

1. L'application est évidemment définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$. Essayons donc de déterminer sa réciproque, posons $Z=f(z)=\frac{iz-1}{z+1}$, alors $Zz+Z=iz-1$, soit $z(Z-i)=-1-Z$, ou encore $z=\frac{Z+1}{i-Z}$. Cette expression n'a un sens que si $Z\neq i$, et donne dans ce cas la valeur de l'unique antécédent par f de Z. L'application f est donc bijective de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{i\}$.
2. Calculons donc $f(2)=\frac{2i-1}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$; et $f(1+i)=\frac{i-1-1}{2+i}=\frac{(i-2)(2-i)}{5}=\frac{-3+4i}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$. Pour les antécédents, on peut exploiter le calcul de la question précédente, on connait déjà la réciproque de f. L'unique antécédent de 2 sera donc égal à $\frac{3}{i-2}=\frac{3(i+2)}{-5}=-\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i$. Celui de $1+i$ est donné par $\frac{2+i}{-1}=-2-i$.
3. On cherche à résoudre l'équation $f(z)=z$, soit $z(z+1)=iz-1$, ou encore $z^2+(1-i)z+1=0$. Il s'agit d'une équation du second degré de discriminant $\Delta=(1-i)^2-4=-2i-4$. On cherche $\delta=a+ib$ tel que $\delta^2=\Delta$, ce qui donne les deux conditions $a^2-b^2=-4$ et $ab=-2$. En ajoutant la condittion sur le module, on obtient la troisième équation $a^2+b^2=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. En soustrayant et additionnant les équations extrêmes, on a $2a^2=2\sqrt{5}-4$ et $2b^2=2\sqrt{5}+4$, ce qui permet de choisir en constatant que a et b sont de signe contraire $\delta=\sqrt{\sqrt{5}-2}-i\sqrt{\sqrt{5}+2}$. On trouve alors deux points invariants par f : $z_1=\frac{i-1+\delta}{2}$ et $z_2=\frac{i-1i\delta}{2}$ (qu'on peut écrire entièrement si on le souhaite, mais ça n'a pas grand intérêt).
4. Posons $z=a+ib$, on a alors $f(z)=\frac{ai-b-1}{a+ib+1}=\frac{(ai-b-1)(a+1-ib)}{(a+1)^2+b^2}$ $=\frac{a^2i+ai+ab-ab-b+ib^2-a-1+ib}{(a+1)^2+b^2}=\frac{-b-a-1+i(a^2+b^2+a+b)}{(a+1)^2+b^2}$. Pour avoir une image réelle, z doit donc vérifier $a^2+b^2+a+b=0$, soit $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=0$. On reconnait l'équation d'un cercle de centre $A\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour que l'image de z soit imaginaire pure, on doit avoir $-b-a-1=0$, soit $b=-a-1$, donc z appartient à une droite du plan, d'équation $y=-x-1$.
5. Pour avoir $f(z)\in\mathbb{U}$, il suffit d'avoir $|iz-1|=|z+1|$. En posant $z=a+ib$ et en élevant tout au carré, on trouve la condition $|ia-b-1|^2=|a+ib+1|^2$, soit $(-b-1)^2+a^2=(a+1)^2+b^2$. On développe tout : $b^2+1+2b+a^2=a^2+2a+1+b^2$, soit très simplement $a=b$. Les nombres complexes ayant une image de module 1 sont donc situés sur la première bissectrice des axes (on vérifie par exemple que c'est le cas pour $1+i$ dont on a calculé l'image plus haut : $\left|-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1$).

6. On n'arrive pas à grand chose à partir de l'expression de $f(z)$. Mieux vaut repartir de la réciproque : en posant $Z = c + id$, $\dfrac{Z+1}{i-Z} = \dfrac{c+1+id}{-c+i(1-d)} = \dfrac{(c+1+id)(-c-i+id)}{c^2+(1-d)^2} = \dfrac{-c^2-ic+icd-c-i+id-icd+d-d^2}{c^2+(1-d)^2} = \dfrac{-c^2-c+d-d^2+i(-c-1+d))}{c^2+(1-d)^2}$. Les images des nombres ayant une partie imaginaire strictement positive sont les Z ayant un antécédent dont la partie imaginaire est positive, donc vérifiant $-c-1+d>0$, autrement dit $c+1<d$. Il s'agit du demi-plan situé au-dessus de la droite d'équation $y = x+1$ dans le plan complexe.

II. Une étude plus générale

1. Prenons donc un $z \in \mathbb{U}$, qui peut s'écrire sous la forme $e^{i\alpha}$. On a alors $f(z) = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)} \in \mathbb{U}$.
2. Comme $a \notin \mathbb{U}$, on ne peut pas avoir $|\overline{a}| = 1$, donc $|\overline{a}e^{i\alpha}| \neq 1$. En particulier, $\overline{a}e^{i\alpha} \neq -1$, donc le dénominateur ne peut pas s'annuler si $z \in \mathbb{U}$. L'application est donc définie sur $\mathbb{U}$. Cherchons désormais à calculer $|f(z)| = \dfrac{|z+a|}{|\overline{a}z+1|} = \dfrac{|z+a|}{|\overline{a}z\overline{z}+\overline{z}|} \times |\overline{z}|$. Le nombre z étant de module 1, $|\overline{z}| = 1$ et $z\overline{z} = 1$ donc $|f(z)| = \dfrac{|z+a|}{\overline{a}+\overline{z}} = \dfrac{|z+a|}{|\overline{z+a}|} = 1$, donc $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. (a) Écrivons $\alpha = a+ib$ et $\beta = c+id$, on a donc $|\alpha+\beta|^2 = (a+c)^2+(b+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)$. Or, $|\alpha|^2 = a^2+b^2$, $|\beta|^2 = c^2+d^2$ et $\overline{\alpha}\beta = (a-ib)(c+id) = ac+bd+i(ad-bc)$ a pour partie réelle $ac+bd$, ce qui donne bien la formule annoncée.
   (b) Par hypothèse, on doit avoir $|f(e^{i\theta})| = 1$, c'est-à-dire $|ae^{i\theta}+b| = |ce^{i\theta}+d|$. En élevant au carré et en utilisant la question précédente, $|ae^{i\theta}|^2 + |b|^2 + 2\text{Re}\,(\overline{ae^{i\theta}}b) = |ce^{i\theta}|^2 + |d|^2 + 2\text{Re}\,(\overline{ce^{i\theta}}d)$, soit en effet $|a|^2+|b|^2+2\text{Re}\,(\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2+|d|^2+2\text{Re}\,(\overline{c}de^{-i\theta})$.
   (c) Écrivons le nombre β sous forme exponentielle $\beta = re^{i\mu}$. Pour $\theta = \mu$, on a $\beta e^{-i\theta} = re^{i\mu}e^{-i\mu} = r$, donc $2\text{Re}\,(\beta e^{-i\theta} = 2r$, et on doit donc avoir $\alpha + 2r = 0$. Si au contraire on prend $\theta = \mu+\pi$, on trouve $\beta e^{-i\theta} = re^{-i\pi} = -r$, donc on trouve la condition $\alpha - 2r = 0$. En additionnant ces deux équations, on trouve que $2\alpha = 0$ donc $\alpha = 0$, puis $2r = 0$, soit $|\beta| = 0$, ce qui implique $\beta = 0$.
   Or, en faisant passer tout à gauche dans l'égalité de la question précédente, $|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2+2\text{Re}\,((\overline{a}b-\overline{c}d)e^{-i\theta}) = 0$. En appliquant le calcul qu'on vient d'effectuer, on a $|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2 = 0$ (c'est ce qui joue le rôle de α) et $\overline{a}b-\overline{c}d = 0$ (c'est notre β).
   (d) Si $a = 0$, la deuxième condition ci-dessus devient $\overline{c}d = 0$, donc on a soit $c = 0$ soit $d = 0$. Or on a supposé dès le départ que $ad-bc \neq 0$, donc on ne peut pas avoir à la fois $a = 0$ et $c = 0$. Il ne reste que la possibilité $d = 0$, dont on déduit $|b| = |c|$. On peut alors écrire que $\dfrac{b}{c} \in \mathbb{U}$, c'est-à-dire que $\dfrac{b}{c} = e^{i\theta}$. On en déduit que $f(z) = \dfrac{b}{cz} = \dfrac{e^{i\theta}}{z}$, qui est bien de la forme étudiée à la première question.
   (e) Si $a \neq 0$, on peut écrire $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}}$ en exploitant notre deuxième condition. En remettant dans la première, $|a|^2 + \left|\dfrac{\overline{c}^2d^2}{\overline{a}^2}\right| = |c|^2+|d|^2$, soit en multipliant tout par $|\overline{a}|^2$ (qui est égal à $|a|^2$), $|a|^4+|c|^2|d|^2 = |a|^2|c|^2+|a|^2|d|^2$. On fait tout passer de l'autre côté et on peut factoriser : $(|a|^2-|c|^2)(|a|^2-|d|^2) = 0$. Celà implique bien $|a|^2 = |c|^2$ (donc $|a| = |c|$ puisqu'on parle de réels positifs), ou $|a|^2 = |d|^2$.
   (f) Supposons donc que $|a| = |c|$, soit $a = ce^{i\theta}$. On a alors $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}} = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{c}e^{-i\theta}} = de^{i\theta}$. Mais on a alors $ad-bc = cde^{i\theta}-cde^{i\theta} = 0$, ce qui est interdit ! On a donc $|a| = |d|$, soit $a = de^{i\theta}$, et $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}} = \dfrac{\overline{c}de^{i\theta}}{\overline{d}}$ donc $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{de^{i\theta}z + \frac{\overline{c}de^{i\theta}}{\overline{d}}}{cz+d} = e^{i\theta}\dfrac{z+\frac{\overline{c}}{\overline{d}}}{\frac{c}{d}z+1}$, qui est exactement de

la forme étudiée à la deuxième question en posant $a = \frac{\overline{c}}{\overline{d}}$.